Serie 3

1. Sei A_n die Tridiagonalmatrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Berechnen Sie (von Hand) die LR–Zerlegung $A_n = L_n R_n$ im Fall $n = 5$ mit diagonaler Pivot–Strategie.

b) Kontrollieren Sie Ihr Resultat mit MATLAB ($[L, U, P] = lu(A)$ liefert die Faktoren $L, U \equiv R$ und die Permutationsmatrix P, so dass $PA = LU$).

c) Bezeichnen $\mu_\star$ die Anzahl Multiplikationen oder Divisionen und $\alpha_\star$ die Anzahl Additionen, die für eine Operation $\star$ benötigt werden (ohne Operationen mit 0).

(i) Zählen Sie $\mu_{\mathrm{LR}}(n), \alpha_{\mathrm{LR}}(n)$ für die LR–Zerlegung von A_n.
(ii) Zählen Sie $\mu_{\mathrm{S}}(n), \alpha_{\mathrm{S}}(n)$ für die nachfolgende Lösung des linearen Gleichungssystems $A_n x = b$ gemäss dem Algorithmus

1. Löse $L_n y = b$ nach y (Vorwärtseinsetzen).
2. Löse $R_n x = y$ nach x (Rückwärtseinsetzen).

2. (Normen, Kondition)

a) Zeichnen Sie die Einheitskreisscheibe $\|x\|_p \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^2$, für die Höldersche p–Norm in den Fällen $p = 2$ (Euklidische Norm), sowie $p = 1$ und $p = \infty$.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie in den Fällen $p = 2, 1, \infty$ von Hand die Norm $\|A\|_p$, sowie die Kondition $\mathrm{cond}_p(A)$. Sie können Ihr Ergebnis mit MATLAB kontrollieren.
Hinweis: Die Berechnung von A^2 kann hilfreich sein!

Bitte wenden!

3. Die n–reihige Hilbertmatrix

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & & \\ \frac{1}{3} & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

wird gerne als Testbeispiel für eine sehr schlecht konditionierte Matrix verwendet, da die Inverse H_n^{-1} eine explizit angebbare Matrix mit ganzzahligen Elementen ist (Erzeugung in MATLAB durch $hilb(n)$ respektive $invhilb(n)$). Betrachten Sie das lineare Gleichungsystem

$$H_n \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_n \quad , \quad \overrightarrow{b}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right)^T \in \mathbb{R}^n$$

für verschiedene $0 < n < 14$, $n \in \mathbb{Z}$.

a) Erzeugen Sie die von MATLAB gelieferte (mit $H \setminus b$ berechnete) Näherung $\overrightarrow{x}_0$ für dessen Lösung.

b) Berechnen Sie das "relative Residuum"

$$\varrho := \frac{\|H_n \overrightarrow{x}_0 - \overrightarrow{b}_n\|}{\|\overrightarrow{b}_n\|}$$

von $\overrightarrow{x}_0$.
Warnung: Die Kleinheit von ϱ bedeutet *nicht* notwendigerweise hohe Genauigkeit von $\overrightarrow{x}_0$!

c) Mit der exakten (ganzzahligen) Lösung $\overrightarrow{x} = H_n^{-1}\overrightarrow{b}_n$ soll nun die tatsächlich erreichte Genauigkeit von $\overrightarrow{x}_0$ beurteilt werden. Berechnen Sie den relativen Fehler

$$\delta := \frac{\|\overrightarrow{x}_0 - \overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|}$$

und vergleichen Sie diesen mit $eps * cond(H)$ mit $eps = 2^{-52}$.
Bemerkung: eps ist das kleinste Inkrement, so dass $1 + eps > 1$ ist.

Abgabe: Bis Mittwoch 30. April um 13.00 Uhr in den Kästchen vor dem HG G53.