D-ITET Numerische Methoden SS 2003
Prof. Dr. J. Waldvogel

Serie 4

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie von Hand die QR–Zerlegung mittels drei Givensrotationen durch, sodass

$$R = \underbrace{Q_{23}^T Q_{13}^T Q_{12}^T}_{Q^T} A$$

gilt. Wir verzichten auf die Berechnung von Q.

2. In der linearen Algebra löst man das Ausgleichsproblem $\|Ac - f\|_2 \stackrel{!}{=} \min$ traditionell mittels den Gaussschen Normalgleichungen $A^T Ac = A^T f$. In der Praxis ist dieser Lösungsweg jedoch nicht zu empfehlen, da die Matrix $A^T A$ häufig schlecht konditioniert ist. Wir illustrieren diesen Sachverhalt mit dem folgenden Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 2\epsilon \\ 2\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \epsilon = 10^{-e}\,,\ e = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Kondition von $A^T A$ hängt von der Grösse von e ab. Experimentieren Sie mit $e = 1, \ldots, 4$:

a) Stellen Sie die Gaussschen Normalgleichungen auf und lösen Sie diese mit MATLAB. Berechnen Sie weiter die Euklidische Kondition von $A^T A$ (mit MATLAB).

b) Berechnen Sie die Lösung des Ausgleichproblems mit QR–Zerlegung (`c=A\f`) und Vergleichen Sie sie mit derjenigen aus Aufgabe a) (`format long` benützen).

Hinweis: Fall $\frac{1}{\epsilon}$ ganzzahlig ist, ist $\left(\frac{2}{\epsilon} + 9\epsilon\right) \cdot c$ ebenfalls ganzzahlig. Dies folgt aus der symbolischen Lösung der Gaussschen Normalgleichungen (ϵ als symbolischen Parameter mitführen). Hier mag die Ganzzahligkeit von $\left(\frac{2}{\epsilon} + 9\epsilon\right) \cdot c$ zu einer bequemen Genauigkeitskontrolle dienen.

Bitte wenden!

3. (**PA**) Die Beobachung eines Stromstosses $i(t)$ ergibt zu den Zeiten t_l $[ms]$ die folgenden Messwerte i_l $[mA]$:

t_l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i_l	0	8	12	13	13	12	10	8	7	6	5

Modellieren Sie $i(t)$ durch Überlagerung von 3 abklingenden Exponentialfunktionen mit bekannten Abklingkonstanten a_k:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{3} c_k e^{-t \cdot a_k} \quad , \quad \overrightarrow{a} = [0.25, 0.5, 0.75]$$

Berechnen Sie die unbekannten Koeffizienten c_k, $k = 1, 2, 3$, durch Ausgleichung nach kleinsten Quadraten und plotten Sie die Datenpunkte sowie die Modellfunktion $i(t)$ für $0 \leq t \leq 20$.

Hinweis: Der MATLAB–Befehl `c=A\i` löst das Ausgleichsproblem $\|A\overrightarrow{c} - \overrightarrow{i}\|_2 \stackrel{!}{=} \min$ mit $A \in \mathbb{R}^{l \times k}$, $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^k$ und $\overrightarrow{i} \in \mathbb{R}^l$ mit $l \geq k$ durch QR–Zerlegung.