Serie 5

1. In der Vorlesung (Folie 31) wurde demonstriert, dass Methode des characteristischen Polynoms zur Berechnung der Eigenwerte/Eigenvektoren der Matrix

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 5 * 10^{-9}$$

in 16-stelliger Arithmetik versagt.
Moderne numerische Verfahren bestimmen die Transformationsmatrix T mit der Eigenschaft

$$T^{-1}AT = D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

direkt. Im obigen Fall geht dies besonders einfach mit dem Ansatz

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Gleichungen für die Unbekannten $\varphi, \lambda_1, \lambda_2$ auf und lösen Sie diese von Hand. Bestimmen Sie auch die zu λ_1, λ_2 gehörigen Eigenvektoren.

Bemerkung: Dies ist der einfachste Fall des sogenannten Jacobi-Verfahrens für das Eigenwertproblem symmetrischen Matrizen. (Nipp/Stoffer, S.196)

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -14 & 5 & 21 \\ -15 & 5 & -3 & 18 \\ -15 & 0 & -1 & 21 \\ -9 & 26 & -11 & -3 \\ 3 & -27 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

a) Entscheiden Sie sich aufgrund der Singulärwertzerlegung von A (mit MATLAB) für einen im Rahmen der Rechengenauigkeit von MATLAB ($\texttt{eps} = 2^{-52}$) vernünftigen Wert für den Rang von A.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Kernes K_A der Abbildung $x \mapsto Ax$ (der Menge der auf den Nullvektor abgebildeten Vektoren x). Geben Sie eine orthogonale Basis in K_A an.

Bitte wenden!

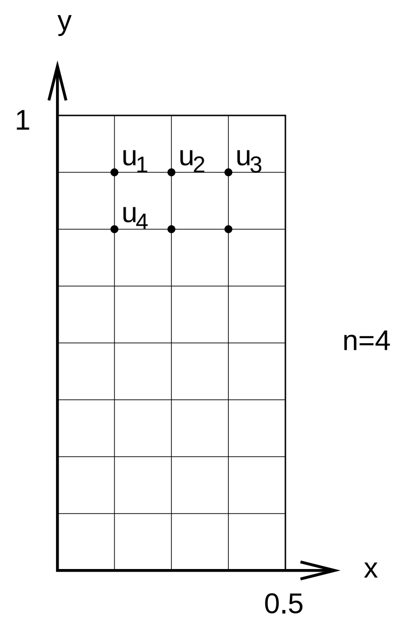
c) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes (range) R_A derselben Abbildung (die Menge der Bildvektoren $y = Ax$, $x \in \mathbb{R}^4$), und geben Sie auch für R_A eine orthogonale Basis an.

3. (**PA**: Vektoriteration) Wir betrachten die Schwingungen einer elastischen, rechteckigen Membran $G := \{(x,y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ mit $a = 0.5$, $b = 1$.
Durch Diskretisierung mit dem 5-Punkt-Differenzenstern im Quadratgitter der Maschenweite $h = 1/(2n)$ wird das Schwingungsproblem auf das algebraische Eigenwertproblem

$$Au = (h^2\lambda)u \quad , \quad u \in \mathbb{R}^N \quad , \quad N = (n-1)(2n-1)$$

zurückgeführt (siehe Figur). Dessen Eigenwerte seien $\lambda_k^{(n)}, k = 1, \ldots, n$. Gemäss Folie 57, Analysis III, WS 2002/03 ist die Gesamtheit der exakten Eigenwerte gegeben durch

$$\lim_{n\to\infty} h^2\lambda_{\mu,\nu}^{(n)} = \pi^2 h^2 \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots \; .$$



Für die Matrix A ergibt sich

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{pmatrix}}_{2n-1 \text{ Blöcke}}, \; B = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}}$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Bestimmen Sie den kleinsten Eigenwert durch inverse Vektoriteration. Starten Sie z.B. mit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T.$$

b) (Fakultativ) Plotten Sie die gefundene Eigenschwingung. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Bringen Sie U auf eine dem physikalischen Gitter entsprechende Gestalt mit
$$\texttt{UU} = \texttt{reshape}(\texttt{U}, \texttt{n} - 1, 2 * \texttt{n} - 1)'$$
2. Ergänzen Sie mit Nullrandwerten:
$$UU \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & UU & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
3. Erzeugen Sie ein zweidimensionales (x, y)–Gitter mit dem Befehl $[\texttt{X}, \texttt{Y}] = \texttt{meshgrid}(\texttt{x}, \texttt{y})$.
4. Erzeugen Sie den plot mit $\texttt{surf}(\texttt{X}, \texttt{Y}, \texttt{UU})$.