D-ITET Numerische Methoden SS 2003
Prof. Dr. J. Waldvogel

Serie 7

1. In der Literatur zur Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen werden oft nur autonome Systeme erster Ordnung behandelt. Dass dies keine wesentliche Einschränkung bedeutet, soll Ziel dieser Aufgabe sein.
Gegeben sei für $u(x)$ das Anfangswertproblem (AWP)

$$4u''' - (u')^2 = 4\cos(x) - 3xu, \quad (\cdot)' = \frac{d}{dx}(\cdot)$$
$$u(0) = \alpha_0,\ u'(0) = \alpha_1,\ u''(0) = \alpha_2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, 3.$$

a) Schreiben Sie obiges AWP in ein nichtautonomes System erster Ordnung der Form $v'(x) = g(x, v(x))$ um (inklusive Anfangsbedingungen).

b) Schreiben Sie das System aus Aufgabenteil a) um in ein autonomes System erster Ordnung der Form $w'(x) = h(w(x))$ (ebenfalls inklusive Anfangsbedingungen).

2. (**PA**: Konjugierte Gradienten) Das *cg–Verfahren* (conjugate gradients) zur Lösung von $Ax + b = 0$ mit $x, b \in \mathbb{R}^n$, $A = A^T$ und A positiv definit wird durch die untenstehende Iterationsvorschrift beschrieben. Dabei sind $x_k, p_k, r_k \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_k > 0$, $\varrho_k > 0$, und $\|r\|^2 = r^T r$ ist das Quadrat der Euklidischen Norm von r.

- Initialisierung:
$$x_0 = 0 \quad , \quad r_0 = b \quad , \quad p_{-1} = 0$$
- Schleife: Für $k = 0, 1, \ldots$:
$$\begin{aligned} \sigma_k &= \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \|r_k\|^2 / \ \|r_{k-1}\|^2, & k > 0 \end{cases} \\ p_k &= \sigma_k p_{k-1} - r_k \\ \varrho_k &= \|r_k\|^2 / (p_k^T A p_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \varrho_k p_k \end{aligned}$$
- Abbruch: Wenn $\|r_{k+1}\|$ genügend klein.

Bitte wenden!

a) Schreiben Sie eine MATLAB Funktion $\texttt{x} = \texttt{cg}(\texttt{A},\texttt{b})$ für obigen Algorithmus unter möglichst sparsamer Verwendung von Speicher und Rechenleistung. Wie viele Vektoren $\in \mathbb{R}^n$ muss man speichern? Wie viele Abbildungen $x \mapsto Ax$, wie viele Skalarprodukte und wie viele Linearkombinationen von Vektoren $\in \mathbb{R}^n$ muss man pro Schritt berechnen?

b) Der Einfachheit halber sei es nun erlaubt, mit gespeicherten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu arbeiten. Wählen Sie z.B. $n = 20$ und

$$\texttt{b} = -\texttt{ones}(\texttt{n},1); \texttt{a} = \texttt{rand}(\texttt{n}); \texttt{A} = \texttt{eye}(\texttt{n}) + \texttt{mu} * (\texttt{a}' + \texttt{a});.$$

Mit kleinem μ (z.B. $\mu = 0.03$) wird $\mathrm{cond}(A) \approx 1$. Für grösseres μ (z.B. $\mu = 0.3$) wird auch $\mathrm{cond}(A)$ grösser, und A kann gelegentlich auch negative Eigenwerte haben. Wiederholen Sie in diesem Fall die Erzeugung von A!
Beobachten Sie das Verhalten von $\|r_{k+1}\|$ in den Fällen $\mu = 0.3, 0.1, 0.03$.
Plotten Sie $\log_{10}(\|r_{k+1}\|)$ gegen k für $k = 0, 1, \ldots$.
Bemerkung: Die Norm des tatsächlichen Fehlers $\|x_{k+1} - \overline{x}\|$ $(A\overline{x} = b)$ kann i.A. nicht unter das Maschinenepsilon `eps` sinken!