D-ITET
Prof. Dr. J. Waldvogel

Numerische Methoden

SS 2003

Serie 9

1. Wir betrachten das autonome Differentialgleichungssystem

$$(0) \quad x' = f(x,y), \quad y' = g(x,y), \quad ()' = \frac{d}{dt}(),$$

dazu die drei Integratoren

(1) $\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + h\underline{f}(\underline{x}_n)$, $h > 0$, $\underline{x} = (x,y)^T$, $\underline{f} = (f,g)^T$ (Euler-Verfahren)

(2) $\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + h\underline{f}(\underline{x}_{n+1})$ (implizites oder Rückwärts-Euler-Verfahren)

(3) $\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_{n+1}), \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_{n+1}). \end{aligned}$

Speziell soll nun der harmonische Oszillator

$$x'' + x = 0, \quad \text{d.h.} \quad x' = y,\ y' = -x$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ mittels der drei Integratoren behandelt werden.

a) Welche Gestalt hat der x-y-Plot (Phasenportrait) der exakten Lösung?

b) Bestimmen Sie für jeden Integrator die Matrix A so, dass

$$\underline{x}_{n+1} = A\underline{x}_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

c) Plotten Sie in allen Fällen die Punktfolgen $\underline{x}_n (n = 0, 1, \ldots, N)$, in dieselbe Figur, aber mit verschiedenen Farben oder Signaturen. Beispiel: $N = 500, h = 0.05$.

d) Verfassen Sie einen kurzen Text, der Vor- und Nachteile der 3 Verfahren beleuchtet. Berücksichtigen Sie dabei neben der Qualität der Approximation auch rechentechnische Aspekte des allgemeinen Falles (0).

e) Zeigen Sie, dass alle durch (3) erzeugten Punkte $\underline{x}_n$ auf einer Kurve

$$\underline{x}^T B \underline{x} = \text{const} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

liegen. Welche Kurve ergibt sich für $h \ll 1$?

Bitte wenden!

Bemerkungen: (i) Der Integrator (3) ist ein Beispiel eines sogenannten *symplektischen* Verfahrens. Diese zeigen die Auswirkungen der reibungsfreien Natur (Fachausdruck: Hamiltonische Form) eines Differentialgleichungssystems auch in der diskreten Approximation. Weiterführende Literatur: E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner: Geometric Numerical Integration, Springer 2002, 515pp.
(ii) Für das Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung) gilt in komplexer Schreibweise ($z_n = x_n + iy_n$):

$$z_{n+1} = z_n(1 - ih - \frac{h^2}{2} + i\frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}).$$

Zu welcher Kategorie ((1), (2), oder (3)) gehört dieses Verfahren?

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

die Matrix aus Serie 6, Aufgabe 1. Wir betrachten das AWP

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = (1, 0, 0, 0)^T \ .$$

Das MATLAB–Programm

```
M=y0;
E=expm(A*h);  % matrix exponential
for k=1:tf/h
  y0=E*y0; M=[M;y0];
end
```

berechnet den Lösungsvektor $y(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq t_f$ mit Schrittweite h an den Stellen $t_k = k \cdot h$, $k = 1, \ldots, \frac{t_f}{h}$.

a) Warum leistet obiges Programm das Gewünschte? Verfassen Sie einen kurzen Text, der Theorie und Funktionsweise des Programms zusammenfassend erklärt.

b) Berechnen Sie mit MATLAB $y(3)$ mit $h = 0.025$ und plotten Sie die vier Komponenten $y_k(t)$, $k = 1, \ldots, 4$ des Lösungsvektors im Intervall $0 \leq t \leq 3$ in dieselbe Figur.

Bemerkung: Die Resultate sind theoretisch *exakt*: Sie enthalten keine Diskretisierungsfehler wie die Näherungen aus einer numerischen Integration. Einzig Rundungsfehler aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit können vorhanden sein.

3. (**PA**:Van der Pol–Oszillator) In geeignet gewählten Einheiten erfüllt das Integral $X(t) := \int_0^t u(\tau)\, d\tau$ der Spannung $u(t)$ über dem Kondensator im Röhrenoszillator von Van der Pol die Differentialgleichung

$$cX'' + \left(\frac{1}{3}(X')^3 - X'\right) + X = 0, \quad ()' = \frac{d}{dt}(), \quad X'(t) = u(t) \tag{1}$$

Siehe nächstes Blatt!

mit Anfangsbedingungen $X(0) = X_0$ und $X'(0) = X_1$ (AWP). In dieser Aufgabe wollen wir das *Phasenportrait*, also die Lösungskurven in der $(X, X') = (X, u)$–Ebene näherungsweise berechnen. Dazu verwenden wir den von MATLAB zur Verfügung gestellten Integrator `ode45` (siehe Hinweise).

a) Schreiben Sie das AWP (1) für $X(t)$ in ein System erster Ordung der Form $y'(t) = f(t, y)$ um (inklusive Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$).

b) Schreiben Sie eine MATLAB–Funktion `functionderiv = vdp(t, y)`, welche für gegebene t und y die Ableitung von $y(t)$ berechnet, dh. welche die in a) vorbereitete Vektordifferentialgleichung definiert.

c) Wählen Sie `c = 1/3` und integrieren Sie die Differentialgleichung (1) numerisch mit dem MATLAB–Integrator `ode45` von $t = 0$ bis $t_f = 6$. Anfangsbedingungen zu Testzwecken: $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$.

d) Plotten Sie die von MATLAB erzeugten Näherungen in den 6 Fällen $y_1(0) = y_2(0) = \{-2, -0.7, -0.1, 0.1, 0.7, 2\}$ *in dieselbe* Figur mit `plot(Y(:, 1), Y(:, 2))`. Hinweis: `hold on` verwenden.

Hinweise zur Syntax/Semantik der Integratoren für ODEs in MATLAB:

- Ein günstiger Integrator für nicht–steife Probleme ist `ode45`: Grundlage ist ein Runge–Kutta–Verfahren der Fehlerordnung 4, wobei gleichzeitig auch eine Approximation der Ordnung 5 berechnet wird (durch Anhängen von zwei weiteren RK–Stufen). Dies ermöglicht eine Schätzung des lokalen Fehlers und damit eine Steuerung der Schrittlänge, so dass vorgegebene Genauigkeitstoleranzen eingehalten werden.
- Mit `help ode45` erhält man eine Detailbeschreibung sowie eine Liste weiterer Integratoren.
- Der Aufruf lautet `[T, Y] = ode45('name', tspan, yinit, opt);`. Parameter:

  `name.m` ist die Funktion `functionderiv = name(t, y)`, welche die rechte Seite der Vektor–Differentialgleichung als *Kolonnenvektor* definiert (siehe b)).

  `tspan` ist der Vektor des Zeitintervalls, über welches integriert werden soll:
  `tspan = [t0, tf]` bewirkt, dass der Kolonnen–Outputvektor `T` die im Integrator erzeugten Zeiten in aufsteigender Reihenfolge von `t0` bis `tf` enthält. Die Matrix `Y` enthält spaltenweise die zugehörgigen Werte der abhängigen Variablen: `Y(i, j)` $= y_j(t_i)$ mit `t0` $= t_1 < t_2 < \cdots < t_n =$ `tf`, $n =$ `length(T)`.

  `yinit` ist der Kolonnenvektor der Anfangswerte.

  `opt` (fakultativ) enthält die gewünschte Genauigkeit (und auf Wunsch vieles mehr!). Mit `opt = odeset('reltol', 1e-3, 'abstol', 1e-6)` erhält man beispielsweise die default–Genauigkeit, die beim Weglassen dieses Parameters automatisch geliefert wird.
  Wählen Sie `opt = odeset('reltol', 1e-4, 'abstol', 1e-6);`.

Bitte wenden!

Fakultative Aufgaben (Beispiele von Prüfungsaufgaben):

4. **a)** Bestimmen Sie das *Stabilitätsgebiet*

$$S_H := \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |V_H(\mu)| < 1 \right\}$$

des Heun–Verfahrens, indem Sie dessen Verstärkungsfaktor $V_H(\mu) = V_{Heun}(\mu)$ explizit berechnen.

b) Charakterisieren Sie die Randkurve von S_H als eine "Lemniskate", d.h. als eine Kurve, deren allgemeiner Punkt $\mu \in \mathbb{C}$ ein konstantes Abstandsprodukt c von zwei festen "Brennpunkten" μ_1, μ_2 hat:

$$|\mu - \mu_1||\mu - \mu_2| = c.$$

Bestimmen Sie μ_1, μ_2 und c.

5. (Exponentialmatrix) Berechnen Sie e^{At} für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

indem Sie die Potenzreihe der Exponentialfunktion sowie – falls erforderlich – die Formel

$$\exp\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix}$$

verwenden.

Abgabe: Mittwoch, 18. Juni