Serie 10

1. Betrachten Sie für das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = f(y), \quad y(0) = y_0$$

die Trapezmethode

$$\tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \frac{h}{2}(f(\tilde{y}_j) + f(\tilde{y}_{j+1})), \quad \tilde{y}_0 = y(0).$$

Um den Wert $\tilde{y}_{j+1}$ zu berechnen, wähle man als Startwert $\tilde{y}_{j+1}^{(0)} = \tilde{y}_j + hf(\tilde{y}_j)$ für die Fixpunktiteration

$$\tilde{y}_{j+1}^{(k+1)} = \tilde{y}_j + \frac{h}{2}(f(\tilde{y}_j) + f(\tilde{y}_{j+1}^{(k)})), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\tilde{y}_{j+1}^{(k)}$ für $k \to \infty$ gegen den Fixpunkt $\tilde{y}_{j+1}$ konvergiert, falls h klein genug und $f(y)$ beschränkt mit beschränkter Ableitung ist.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + x = 0,$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = 0.$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Approximieren Sie $x(0.5)$ mit der Trapezmethode mit einem Schritt $h = 0.5$.

Bitte wenden!

3. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{y}} = A \cdot \mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

b) Berechnen Sie $\mathbf{y}(0.3)$ mit der 3-Schritt-Adams-Bashforth-Formel. Wählen Sie $h = 1/10$ und geben Sie die Startwerte an den Stellen $t = 1/10$ und $t = 2/10$ vor, mit Hilfe von a). Rechnen Sie alle Resultate und Zwischenresultate auf 5 Ziffern genau.

c) Berechnen Sie den absoluten Fehler der Approximation.

4. **a)** (**PA**) Ersetzen Sie in Ihrem Programm der Serie 9, Aufgabe 4, das Heunverfahren durch die implizite Mittelpunktsregel: $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n+1}}{2})\right)$. Lösen Sie die implizite Gleichung für $\tilde{y}_{n+1}$ mit Fixpunktiteration (Startwert $\tilde{y}_{n+1}^{(0)} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n)$, Toleranz $tol = 10^{-6}$). Zeichnen Sie die für die Schrittweiten $h = 0.2$ und $h = 0.1$ resultierenden Bahnen für $0 \leq t \leq 500$.

b) Vergleichen Sie mit den Bahnen, die durch Anwendung des Verfahrens von Heun resultieren.

Abgabe: Mittwoch 21. Juni 2006 in der Uebungsstunde.
www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt