Serie 11

1. Gegeben sei das Butcher-Tableau des ϑ-Verfahrens $\begin{array}{c|c} \vartheta & \vartheta \\ \hline & 1 \end{array}$.

a) Für welche ϑ ist das Verfahren explizit bzw. implizit?

b) Bestimmen Sie die Fehlerordnung des Verfahrens mit $\vartheta = 1/2$.

c) Skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet der Verfahren mit $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$.

2. Betrachten Sie das AWP $\dot{y} = Ay$, $y(0) = y^0$, mit

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 999/10 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass y^0 ein Eigenvektor von A ist. Sei $y(t_n)$ die exakte Lösung an der Stelle t_n, und $\tilde{y}^n$ deren numerische Approximation.

a) Benutzen Sie das explizite Euler–Verfahren mit $h = 1/10$, und zeichnen Sie den Fehler $\|y(t_n) - \tilde{y}^n\|_2$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ auf.

b) Verkleineren Sie h progressiv von $h = 1/10$ bis zu dem kritischen Wert h_{max} : für den gilt $\tilde{y}^n$ bleibt beschräkt für $h < h_{max}$.

c) Wiederholen Sie a) mit dem impliziten Euler-Verfahren.

d) Erklären Sie das Verhalten in a) und c).

3. (**PA**) Wir betrachten die Diffenrentialgleichungen für die Keplerbewegung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_3 \\ \dot{y_2} &= y_4 \\ \dot{y_3} &= -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \\ \dot{y_4} &= -\frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 13.3, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0, y_4(0) = 0.2$.

Bitte wenden!

a) Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweitensteuerung (Richardson, siehe Skript S.88) auf das System an. Wählen Sie $TOL = 10^{-5}$. Plotten Sie $(y_1(t), y_2(t))$ für $t \in [0, 400]$.

b) Plotten Sie die Schrittweiten $h(t)$ aus a).

Abgabe: Mittwoch 28. Juni 2006 in der Uebungsstunde.
`www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt`