Serie 12

1. Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1001 & 999 \\ 999 & -1001 \end{pmatrix} x.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$.

b) Wir wollen das explizite Euler-Verfahren auf dieses System anwenden. Wie muss die Schrittweite sein, damit die numerische Lösung zu den Anfangsbedingungen

(i) $x(0) = (-1, 1)^T$, (ii) $x(0) = (1, 1)^T$ und (iii) $x(0) = (2, 0)^T$

qualitativ das richtige Verhalten zeigt?

2. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

$$u_t = u_{xx} - \cos(2\pi x), \quad x \in (0, 1)$$

mit Anfangsbedingung $u(0, x) = 0$ für $x \in (0, 1)$ und Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ für $t > 0$. Gesucht sei eine Approximation der Lösung $u(t, x)$, $t \in [t_0, t_f]$. Dazu soll die "Method of lines" angewendet werden mit dem impliziten Euler-Verfahren für die Zeitintegration.
Formulieren Sie die Methode und rechnen Sie dann ein Beispiel mit $h = 0.01, t_f = 0.1$ und einem Zeitschritt $\bar{h}$ so dass der globale Fehler $O(\bar{h})$ ist. Stellen Sie die Approximation der Lösung graphisch dar.

3. Betrachten Sie die Poissongleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= 1 \qquad (x, y) \in \Omega := (-1, 1) \times (-1, 1) \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

a) Diskretisieren Sie diese Gleichung mit der 5-Punkte-Formel aus der Vorlesung.
Hinweis: Der MATLAB-Befehl `A=delsq(numgrid('S',n))` erzeugt die Matrix der Diskretisierung mit `n` Gitterpunkten in jeder Richtung. Wählen Sie $n = 100$.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungsystem mit dem CG-Verfahren aus der Serie 4, Aufgabe 3, und stellen Sie die Approximation der Lösung graphisch dar.

Abgabe: Möglich am Mittwoch 5. July 2006 in der Uebungsstunde.
`www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt`