Serie 3

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Konvergiert das Jacobi-Verfahren für dieses System? (Begründung !)

b) Wenn das Jacobi-Verfahren konvergiert, berechnen Sie einen Iterationsschritt mit dem Startvektor $\binom{1}{1}$, und bestimmen Sie die Anzahl Iterationen, die es braucht, um den relativen Anfangsfehler um einen Faktor 10^{-6} zu verkleinern (in der 2-Norm).

2. Gegeben sei die Koeffizienten-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

des linearen Gleichungssytems $Ax = b$.

a) Plotten Sie mit MATLAB für die Matrix T des SOR-Verfahrens den Spektralradius gegen den Parameter $\omega, 0 < \omega < 2$. Wann wird das Verfahren am schnellsten konvergieren?

b) Wieviele Iterationen braucht das SOR-Verfahren ungefähr für $\omega = 0.4, 1.4$, damit der (absolute) Anfangsfehler in der 2-Norm um ein Faktor 10^{-10} verkleinert wird? Ist das ein Widerspruch zu a)?

3. Sei A eine symmetrische, positiv definite (3×3)–Matrix. Zeigen Sie, dass für das Funktional $F(u) = \frac{1}{2}u^T Au + u^T b$, mit $u, b \in \mathbb{R}^3$, der Gradient durch $\nabla F(u) = Au + b$ gegeben ist.

Bitte wenden!

4. (**PA**)

a) Implementieren Sie in MATLAB das Jacobi–Verfahren.

b) Testen Sie Ihr Programm mittels des Modellproblems `model(k)` im File `model.m` (Diskretisierung der Laplace Gleichung auf $[0,1] \times [0,1]$, k Gitterpunkte in jede Richtung). Benutzen Sie die rechte Seite `rhs.m`, für k die Werte $k = 10, 20, 40$ und als Abbruchkriterium eine Toleranz von 10^{-5}.

c) Verifizieren Sie die Resultate der Serie 2, Aufgabe 2.

Hinweise: Verwenden Sie das Programmgerüst `jac.m`, sowie die files `model.m` und `rhs.m`, die Sie alle auf der Homepage der Vorlesung unter *Serien* finden!

Abgabe: Mittwoch 3. Mai 2006 in der Uebungsstunde.
`www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt`