Serie 5

1. Betrachten Sie die Abbildung $F(x) = 2e^{-x/2}$.

a) Zeigen Sie graphisch, dass die Funktion F einen Fixpunkt x^* besitzt.

b) Zeigen Sie, dass im Intervall $I = [0.8, 1.4]$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

c) Geben Sie eine obere Schranke n für die Anzahl der Iterationen $x_{j+1} = 2e^{-x_j/2}$ ($j = 0, 1, \ldots$) an, so dass $|x_n - x^*| \leq 10^{-6}$, wobei $x_0 \in I$ ein *beliebiger* Startwert in I ist.

2. Die Kepler'sche Gleichung

$$x - e \sin x = t$$

soll für gegebene Werte der Parameter e und t mit dem Newtonverfahren nach x aufgelöst werden.

a) Formulieren Sie den allgemeinen Newton-Schritt zur Lösung der Kepler-Gleichung.

b) Führen Sie den ersten Schritt numerisch durch für $e = 0.4$ und $t = 0.4$ mit dem Startwert $x_0 = 0.7$ (Bogenmass!).

3. Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} e^{xy} & + & x^2 & + & y & - & 1.4 & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & + & x & - & 0.46 & = & 0 \end{array} \qquad (1)$$

soll mit dem Newton- und dem Quasi-Newtonverfahren gelöst werden.

a) Wählen Sie als Startwert $(x_0, y_0) = (0.5, 0.4)$ und formulieren Sie das Newtonverfahren für das System (1). Führen Sie einen Newtonschritt von Hand durch.

b) Bestimmen Sie eine Nullstelle von (1) mit MATLAB mit dem

(i) Newtonverfahren

(ii) Quasi-Newtonverfahren

bis auf eine relative Toleranz von 10^{-10} genau. Starten Sie die Iterationen mit $(x_0, y_0) = (0.5, 0.4)$. Bestimmen Sie jeweils die benötigte Anzahl Schritte.

Bitte wenden!

4. (**PA**)

a) Entwickeln Sie ein robustes Verfahren zur Berechnung der Nullstellen einer skalaren Funktion. Der Algorithmus sei der folgende:

- Ausgehend von einem Intervall $[a_0, b_0]$ wenden Sie das Bisektionsverfahren solange an, bis die Nullstelle mit einer Genauigkeit von $TOL0$ bekannt ist, d.h. $|b_j - a_j| < TOL0$.
- Wenden Sie anschliessend das Sekantenverfahren mit Startwerten a_j und b_j an, um die Nullstelle mit einer relativen Genauigkeit von TOL zu bestimmen.
- STOP, falls das Sekantenverfahren aus $[a_j, b_j]$ herausführt.

b) Berechnen Sie die Nullstelle(n) der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2 + \ln x, \quad x > 0, \\ g(x) &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

mit Hilfe des Verfahrens, das Sie in a) implementiert haben. Wählen Sie zuerst ein geeignetes Intervall $[a_0, b_0]$ und benutzen Sie $TOL0 = 10^{-1}, TOL = 10^{-10}$. Wenden Sie jetzt das Verfahren nur auf $g(x)$ mit den Parametern $a_0 = -.9, b_0 = 1.1, TOL0 = 3, TOL = 10^{-10}$ an. Erklären Sie das Ergebnis.

Hinweis: Die zu betrachtenden Funktionen ($f(\cdot)$ =`f(.)`, $g(\cdot)$ =`g(.)`) sollen dem Algorithmus als *string* Argumente übergeben werden. Verwenden Sie die MATLAB–Funktion `feval(func,x)` um diese Funktionen innerhalb des Algorithmus an der Stelle x auszuwerten.

Abgabe: Mittwoch 17. Mai 2006 in der Uebungsstunde.
`www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt`