Serie 6

1. Die Beobachtung eines Stromstosses $i(t)$ ergibt zu den Zeiten t_ℓ[ms] die folgenden Messwerte i_ℓ[mA]:

t_ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i_ℓ	0	8	12	13	13	12	10	8	7	6	5

Wir modellieren $i(t)$ durch Überlagerung von 3 abklingenden Exponentialfunktionen mit bekannten Abklingkonstanten $a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.75$:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{3} c_k e^{-ta_k}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k, $k = 1, 2, 3$, so dass

$$\sum_{\ell=1}^{11} [i(t_\ell) - i_\ell]^2 \quad \text{minimal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit MATLAB auf die folgenden zwei Arten:

a) Über die Gauss'schen Normalgleichungen,

b) Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung. MATLAB-Befehl `[U,S,V] = svd(A)`

Ermitteln Sie, ab welcher Stelle sich a) von b) unterscheidet (`format long`).

2. Von einer gesuchten Funktion $f(x)$ seien die Funktionswerte f_j an den Stützstellen $x_j,\ j = 0, 1, 2, 3$ bekannt:

x_j	1	2	4	8
f_j	0	-2	-1	2

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom nach Lagrange an der Stelle $x = 3$.

b) Werten Sie das Interpolationspolynom an der Stelle $x = 3$ mit Hilfe der Baryzentrischen Formel aus.

Bitte wenden!

3. (**PA**) Nichtlineares Ausgleichproblem:

Die Konzentration $z(t)$ eines Stoffes in einem chemischen Prozess gehorcht dem Gesetz

$$z(t) = a_1 + a_2 \exp(\alpha_1 t) + a_3 \exp(\alpha_2 t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1, \alpha_2 < 0.$$

Zur Bestimmung der Parameter a_1, a_2, a_3, α_1, α_2 liegen für $z(t)$ folgende Messwerte z_k vor:

t_k	0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	8.0	10.0
z_k	3.85	2.95	2.63	2.33	2.24	2.05	1.82	1.80	1.75

Lösen Sie das nichtlineare Ausgleichsproblem auf die folgenden drei Arten:

a) Gauss–Newton–Verfahren ohne Minimierung (`gn.m` (mit `withmini=0`) von der Homepage)

b) Gauss–Newton–Verfahren mit Minimierung (`gn.m` (mit `withmini=1`) von der Homepage)

c) Mit der MATLAB Funktion `fsolve` und options

```
optimset('Display','iter','Jacobian','on','NonlEqnAlgorithm',
'gn',...,'TolX',1e-8,'TolFun',1e-4);
```

für die Startwerte

(i) $a_1^{(0)} = 1.75, \quad a_2^{(0)} = 1.20, \quad a_3^{(0)} = 0.80, \quad \alpha_1^{(0)} = -0.5$ und $\alpha_2^{(0)} = -2.0$

(ii) $a_1^{(0)} = 1, \quad a_2^{(0)} = 1, \quad a_3^{(0)} = 1, \quad \alpha_1^{(0)} = -1$ und $\alpha_2^{(0)} = -1$

und für die relative Toleranz $RTOL = 10^{-8}$ im Gauss-Newton-Verfahren. Bestimmen Sie die Anzahl benötigter Iterationen bis zur Konvergenz.

Abgabe: Mittwoch 24. Mai 2006 in der Uebungsstunde.
`www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt`