

Serie 8

1. a) Berechnen Sie *von Hand* eine Approximation des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0.526978557614\dots,$$

indem Sie drei Schritte der Trapezmethode durchführen.

- b) Verbessern Sie die Werte aus a) indem Sie 2 Schritte des Rombergschemas durchführen.

2. a) Gegeben seien die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

und das Integral $I = \int_0^\pi f(x) dx = \pi/\sqrt{2}$. Bestimmen Sie eine Approximation von I mit der 5-Punkt-Gaussformel. Diese Formel besitzt die folgenden Knoten und Gewichte (auf 8 Stellen gerundet):

$$\begin{array}{lll} \pm x_i : & 0 & 0.53846931 \quad 0.90617985 \\ w_i : & 0.56888889 & 0.47862867 \quad 0.23692689 \end{array}$$

- b) Unterteilen Sie das Intervall $[0, \pi]$ in drei gleich grosse Teilintervalle, und wenden Sie die 5-Punkt-Gaussformel auf jedes Teilintervall an.

- c) Vergleichen Sie Ihre Resultate in a) und b) mit der exakten Lösung.

3. (PA) Adaptives Quadraturverfahren

- a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm für eine adaptive Quadraturmethode (basierend auf der Trapezmethode) zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x) dx \neq 0.$$

Implementieren Sie folgenden Algorithmus: Gegeben seien die Intervallgrenzen a, b , die relative Toleranz TOL und eine Schätzung des Wertes des Integrals I_s .

bitte wenden!

Bitte wenden!

```

h = b-a % Schrittweite
I1 = Trapezregel angewandt auf [a,b]
I2 = Simpsonregel angewandt auf [a,b]
if I1+Is*TOL/eps == I2+Is*TOL/eps
    I = I2 % Teilintegral genau genug berechnet
else
    % Verfeinerungsschritt
    wende die Routine rekursiv auf 2 Teilintervalle an
end

```

b) Testen Sie Ihr Programm für das Integral

$$\int_0^1 \left(e^{-50(x-0.5)^2} + e^{-2x} \right) dx = 0.68299504214 \dots$$

mit Schätzung $I_s = 0.5$ und den Toleranzen $TOL = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$.

c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Resultaten der MATLAB-Funktion `quad`.

Abgabe: Mittwoch 7. Juni in der Übungsstunde.

http://www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt