Serie 8

1. **a)** Berechnen Sie *von Hand* eine Approximation des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0.526978557614\ldots,$$

indem Sie drei Schritte der Trapezmethode durchführen.

b) Verbessern Sie die Werte aus a) indem Sie 2 Schritte des Rombergschemas durchführen.

2. **a)** Gegeben seien die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$$

und das Integral $I = \int_0^\pi f(x)\,dx = \pi/\sqrt{2}$. Bestimmen Sie eine Approximation von I mit der 5-Punkt-Gaussformel. Diese Formel besitzt die folgenden Knoten und Gewichte (auf 8 Stellen gerundet):

$\pm x_i$:	0	0.53846931	0.90617985
w_i :	0.56888889	0.47862867	0.23692689

b) Unterteilen Sie das Intervall $[0, \pi]$ in drei gleich grosse Teilintervalle, und wenden Sie die 5-Punkt-Gaussformel auf jedes Teilintervall an.

c) Vergleichen Sie Ihre Resultate in a) und b) mit der exakten Lösung.

3. (**PA**) Adaptives Quadraturverfahren

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm für eine adaptive Quadraturmethode (basierend auf der Trapezmethode) zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \neq 0.$$

Implementieren Sie folgenden Algorithmus: Gegeben seien die Intervallgrenzen a, b, die relative Toleranz TOL und eine Schätzung des Wertes des Integrals I_s.

bitte wenden!

Bitte wenden!

```
h  = b-a % Schrittweite
I1 = Trapezregel angewandt auf [a,b]
I2 = Simpsonregel angewandt auf [a,b]
if I1+Is*TOL/eps == I2+Is*TOL/eps
  I = I2 % Teilintegral genau genug berechnet
else     % Verfeinerungsschritt
  wende die Routine rekursiv auf 2 Teilintervalle an
end
```

b) Testen Sie Ihr Programm für das Integral

$$\int_0^1 \left(e^{-50(x-0.5)^2} + e^{-2x}\right) dx = 0.68299504214\ldots$$

mit Schätzung $I_s = 0.5$ und den Toleranzen $TOL = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$.

c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Resultaten der MATLAB-Funktion `quad`.

Abgabe: Mittwoch 7. Juni in der Übungsstunde.
http://www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt