Serie 9

1. Bestimmen Sie mit dem symmetrischen Differenzenquotienten 1. Ordnung

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

eine Näherung für die Ableitung $f'(x_0)$ bei $x_0 = \pi/4$ von $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}. \tag{1}$$

Wählen Sie dazu $h = 10^{-k}$ mit $k = 1, 2, \ldots, 14$ und vergleichen Sie die relativen Fehler. Welches h ist optimal?

2. Lösen Sie mit dem expliziten Eulerverfahren die beiden folgenden Anfangswertprobleme für die angegebenen Zeiten t_f:

a) $\dot{x} = -0.5x, \quad x(0) = 1, \quad t_f = 1, 2, 3$

b) $\dot{x} = t^2 + x^2, \quad x(0) = -1, \quad t_f = 1.$

Wählen Sie jeweils die drei verschiedene Schrittweiten $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ und vergleichen Sie die gefundenen Werte mit den Werten der exakten Lösung (für b) gilt $x(1) = -0.23256716\ldots$).

3. Gegeben sei das folgende explizite Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

a) Wieviele Stufen hat es?

b) Bestimmen Sie die Fehlerordnung.

4. (**PA**) Verfahren von Heun für das 2-Körper Problem

Bitte wenden!

a) Implementieren Sie das Verfahren von Heun

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^{(*)} &= \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) \\
\tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + \frac{h}{2}(f(t_n, \tilde{y}_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(*)})
\end{aligned}
$$

und wenden Sie es an auf das 2-Körper Problem

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_3 \\
\dot{y}_2 &= y_4 \\
\dot{y}_3 &= -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \\
\dot{y}_4 &= -\frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\right\} \tag{2}
$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 0.5, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0, y_4(0) = \sqrt{3}$. Wählen Sie dazu $t_0 = 0, t_f = 500$. Wenden Sie das Heun-Verfahren mit den zwei Schrittweiten $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ an, und zeichnen Sie die Bahnen $(\tilde{y}_1(t_n), \tilde{y}_2(t_n))$ auf.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Resultaten der MATLAB-Funktion `ode23`. Plotten Sie auch die Schrittweiten $t_{i+1} - t_i$ gegen i.
Hinweis: Aufruf mit `[t,y]=ode23('yprime',[0 tf],[.5;0;0;sqrt(3)])` wobei das m-file *yprime.m* die Ableitungen (2) definiert.

Abgabe: 14. Juni in der Übungsstunde.
`http://www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2006/other/num_math_mavt`