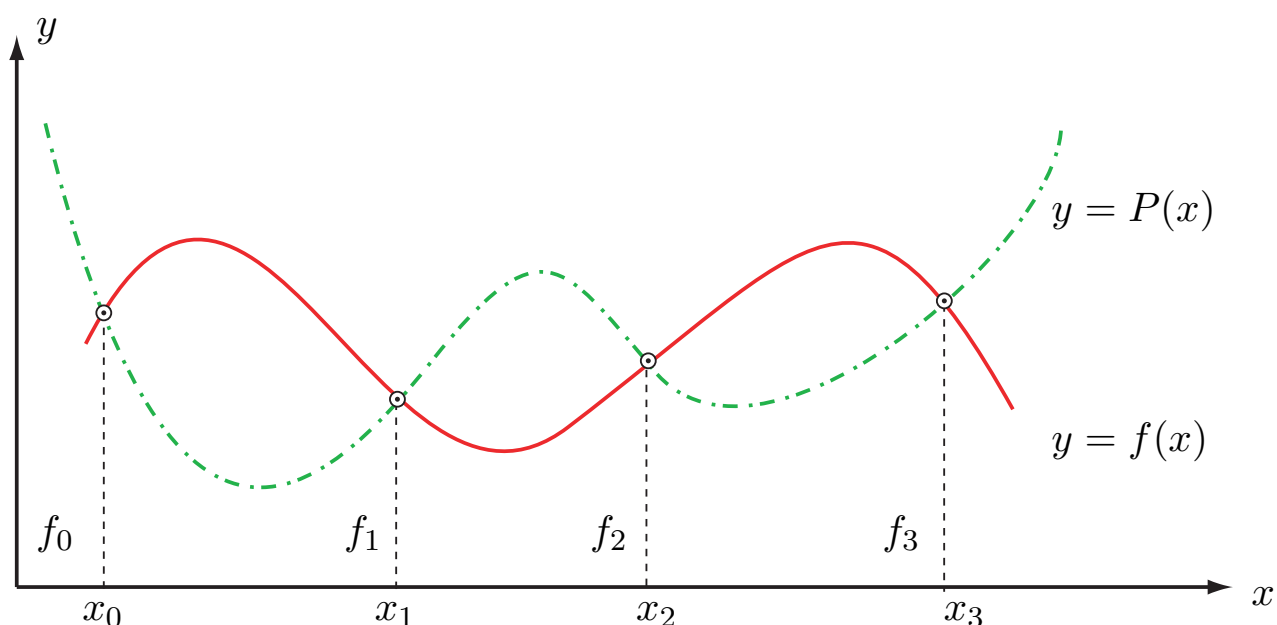

5 Interpolation und Approximation

Problemstellung: Es soll eine Funktion $f(x)$ approximiert werden, von der die Funktionswerte nur an *diskreten* Stellen bekannt sind.

5.1 Das Interpolationspolynom



Gegeben seien die *Stützstellen* $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_j$) und die *Stützwerte* $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \dots, f_n = f(x_n)$.

Gesucht ist ein *Polynom n -ten Grades* ($\text{Grad} \leq n$)

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n ,$$

so dass gilt:

$$P_n(x_0) = f_0, P_n(x_1) = f_1, \dots, P_n(x_n) = f_n .$$

Behauptung: Es gibt *genau ein* Polynom vom $\text{Grad} \leq n$, das diese Aufgabe löst.

Beweis:

a) Eindeutigkeit:

Annahme: Es gibt zwei Polynome $P_n(x), Q_n(x)$ mit $P_n(x_j) = Q_n(x_j) = f_j, j = 0, \dots, n$.

Dann: gilt: $D_n(x) := P_n(x) - Q_n(x)$ hat die $n + 1$ verschiedenen Nullstellen $x_j, j = 0, \dots, n$, und $\text{Grad } D_n \leq n$.

Dies ist im Widerspruch zum Satz von Gauss ('Fundamentalsatz der Algebra')

b) Die Existenz wird mit der *Lagrange-Darstellung* bewiesen.

A) Die Lagrange'sche Darstellung

Herleitung für $n = 3$: Es seien die vier Wertepaare $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$ gegeben.

Definiert man

$$\ell_0(x) := c_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad c_0 \neq 0,$$

gilt $\ell_0(x_1) = \ell_0(x_2) = \ell_0(x_3) = 0$.

Wir wählen c_0 so, dass $\ell_0(x_0) = 1$, d.h. $c_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$. Damit ist

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Analog erhält man

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Es folgt, dass

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Wenn wir das *Interpolationspolynom* 3. Grades als

$$P_3(x) = f_0 \ell_0(x) + f_1 \ell_1(x) + f_2 \ell_2(x) + f_3 \ell_3(x)$$

definieren, besitzt es die gewünschte Eigenschaft: $P_3(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, 2, 3$. Für ein allgemeines n lässt sich das Interpolationspolynom n -ten Grades wie folgt angeben.

Definition: Das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x)$$

mit

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

heisst *Interpolations-Polynom n -ten Grades* (Lagrange-Darstellung).

B) Die baryzentrische Darstellung

Da die Auswertung des Lagrange-Polynoms für praktische Zwecke viel zu aufwendig ist, sucht man eine für numerische Zwecke geeignetere Form des Interpolationspolynoms.

Wir definieren die sogenannten *Stützkoeffizienten*

$$\lambda_i := \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

die nur von den Stützstellen x_j abhängen und die Grössen

$$\mu_i := \frac{\lambda_i}{x - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

die von der Stelle x abhängen, wo zu interpolieren ist. Das Interpolationspolynom lässt sich dann für $x \neq x_j$ schreiben als

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_i f_i}{\sum_{i=0}^n \mu_i}.$$

Begründung: Es gilt

$$\ell_i(x) = \mu_i \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Daraus folgt

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x) = \left\{ \sum_{i=0}^n \mu_i f_i \right\} \cdot \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Diese Beziehung gilt für beliebige f_i . Da für $f_i \equiv 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, gilt dass $P_n(x) \equiv 1$, schliessen wir daher, dass

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \mu_i}. \quad \square$$

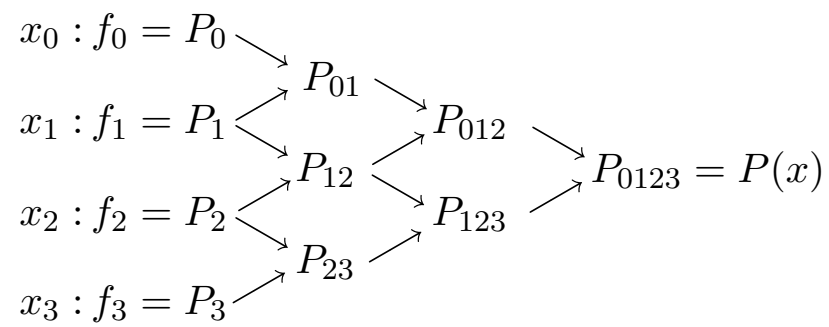
Vorteil der baryzentrischen Darstellung: Die Stützkoeffizienten λ_i lassen sich ein für alle Mal berechnen. Danach ist die Auswertung von $P_n(x)$ 'billig'.

C) Der Algorithmus von Aitken-Neville

Der Algorithmus von Aitken-Neville dient zur Auswertung von $P_n(x)$ an *einer gegebenen* Stelle x .

Herleitung für $n = 3$: Gegeben seien die Stützwerte f_i an den Stützstellen x_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Gesucht ist der Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle x , d.h. $P(x)$. (Wir lassen den Index n weg, da im Verfahren zusätzliche Indizes vorkommen.)

Verfahren: Berechne das folgende Differenzenschema spaltenweise.



wobei z.B.

$$P_{12} = P_2 + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}(P_1 - P_2)$$

$$P_{123} = P_{23} + \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}(P_{12} - P_{23})$$

$$P_{0123} = P_{123} + \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}(P_{012} - P_{123})$$

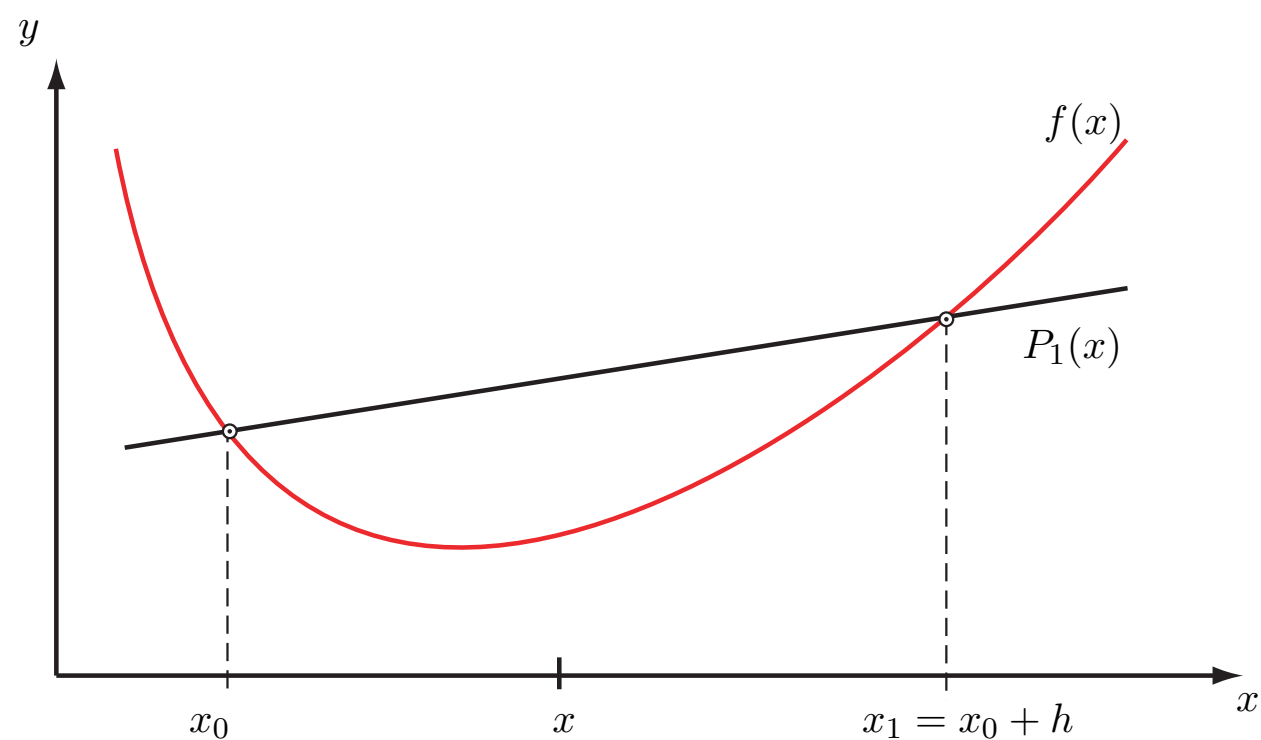
Es gilt: Für $k \geq i$ ist $P_{i\dots k}(x)$ gleich dem Interpolationspolynom (an der Stelle x) durch $(x_i, f_i), \dots, (x_k, f_k)$.

D) Der Fehler des Interpolationspolynoms

Zu x gibt es im kleinsten die Zahlen $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ enthaltenden Intervall eine Zahl ξ , so dass gilt:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Beispiel: Lineare Interpolation im Intervall (x_0, x_1)



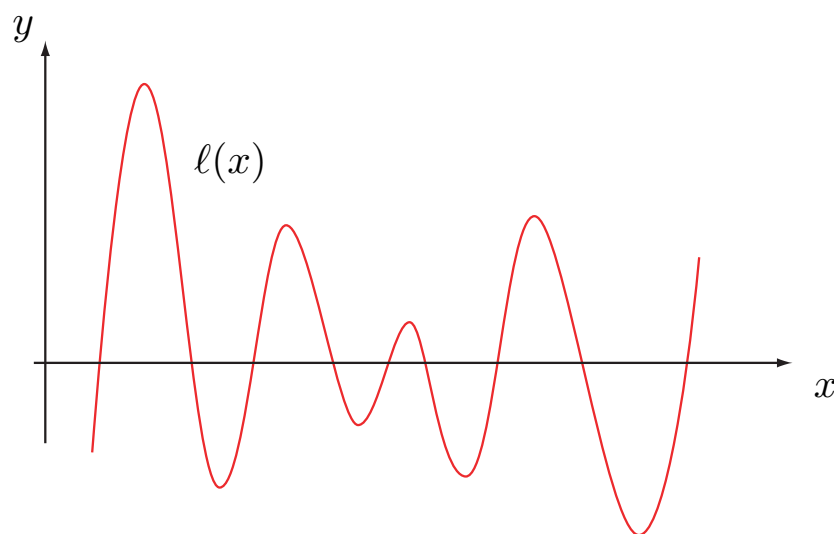
Der Fehler beträgt in diesem Fall $f(x) - P_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)$. Sei $\|f''(x)\| \leq M_2$ für $x \in [x_0, x_1]$. Der Betrag der Funktion $\ell(x) := (x - x_0)(x - x_1)$ nimmt das Maximum auf $[x_0, x_1]$ im Mittelpunkt $x_M = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ an. Deshalb gilt:

$$\|f(x) - P_1(x)\| \leq \frac{1}{8}h^2M_2.$$

Bemerkung: Der Interpolationsfehler wird weitgehend durch den Term

$$\ell(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

bestimmt. Für äquidistante Stützstellen $x_i = x_0 + ih$ und grössere Werte n hat $\ell(x)$ zwischen seinen Nullstellen x_i jeweils Extremalstellen mit gegen den Rand des Intervalls $[x_0, x_n]$ stark zunehmenden Extremalwerten:



Ausweg:

- speziell gewählte Stützstellen (Tschebyscheff)
- stückweise polynomiale Interpolation (Nachteil: unstetige Ableitungen)

5.2 Splineinterpolation

Idee: Anstatt die Funktion $f(x)$ (die an $n + 1$ Stützpunkten gegeben ist) durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ zu approximieren, approximiert man $f(x)$ *stückweise* durch Polynome von *niedrigerem Grad*, und zwar so, dass die Übergänge 'glatt' sind.

Vorbereitung: Wir betrachten die sogenannte *Hermite-Interpolation*.

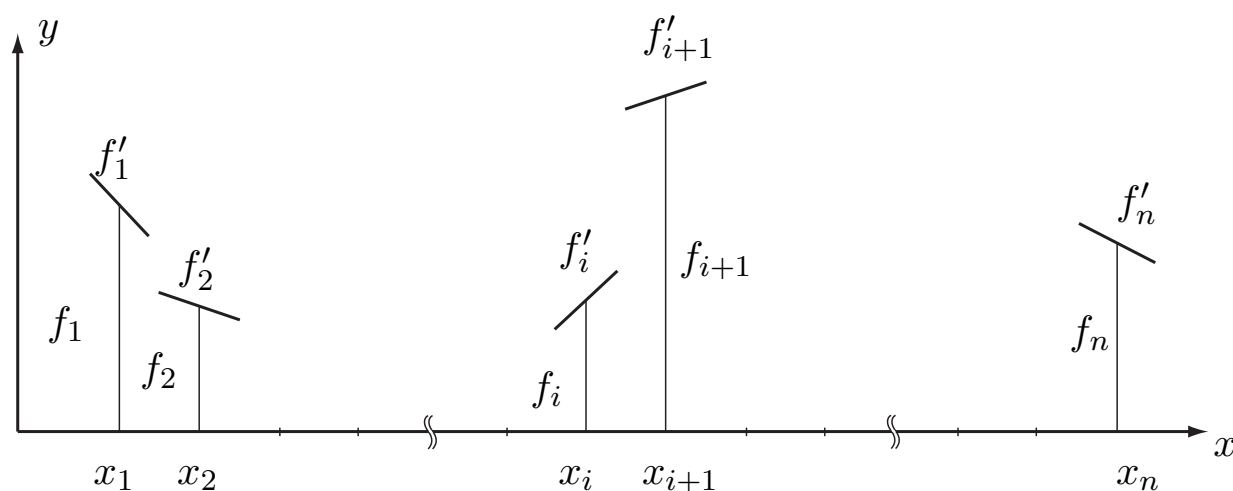
Gegeben: Stützstellen $x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$

Stützwerte $f_1 = f(x_1), \dots, f_i = f(x_i), \dots, f_n = f(x_n)$

Ableitungen $f'_1 = f'(x_1), \dots, f'_i = f'(x_i), \dots, f'_n = f'(x_n)$

Gesucht: Ein Polynom $P_i(x)$ (i ist die Nummer, nicht der Grad!) im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= f_i, & P_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ P'_i(x_i) &= f'_i, & P'_i(x_{i+1}) &= f'_{i+1} \end{aligned} \quad (5.1)$$



Das sind 4 Bedingungen. Daraus folgt, dass $P_i(x)$ ein Polynom 3. Grades ist (Grad ≤ 3).

Wir definieren $h_i := x_{i+1} - x_i$ und führen mittels der Transformation $x = x_i + h_i t$ die neue lokale Variable t ein, $t = (x - x_i)/h_i$. Definiert man $Q_i(t) := P_i(x_i + h_i t)$ gilt $P_i(x) = Q_i(x - x_i)/h_i$. Also erfüllt $P_i(x)$ die Bedingungen (5.1) genau dann, wenn $Q_i(t)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} Q_i(0) &= f_i, & Q_i(1) &= f_{i+1} \\ \dot{Q}_i(0) &= h_i f'_i, & \dot{Q}_i(1) &= h_i f'_{i+1}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= f_i (1 - 3t^2 + 2t^3) + f_{i+1} (3t^2 - 2t^3) + h_i f'_i (t - 2t^2 + t^3) \\ &\quad + h_i f'_{i+1} (-t^2 + t^3), \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} Q_i(0) &= f_i, & Q_i(1) &= f_{i+1} \\ \dot{Q}_i(t) &= f_i (-6t + 6t^2) + f_{i+1} (6t - 6t^2) + h_i f'_i (1 - 4t + 3t^2) \\ &\quad + h_i f'_{i+1} (-2t + 3t^2). \end{aligned}$$

Setzt man $t = 0$ und $t = 1$ in $\dot{Q}_i(t)$ ein, erhält man $\dot{Q}_i(0) = h_i f'_i$, $\dot{Q}_i(1) = h_i f'_{i+1}$.

Definition: *Hermite-Interpolationsfunktion*

$$g(x) := P_i(x) \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Wie man leicht durch Einsetzen verifizieren kann, lässt sich das Polynom Q_i an einer festen Stelle t einfach durch ein Differenzenschema berechnen. Dies führt zum folgenden

Algorithmus: (Auswertung der Hermite Interpolationsfunktion $g(x)$ für ein festes x)

1. Bestimme den Index i , für den $x_i \leq x < x_{i+1}$ gilt.

2. $h_i := x_{i+1} - x_i$, $t := \frac{x-x_i}{h_i}$

3. Berechnung von $Q_i(t)$ mit dem Differenzenschema:

$$\begin{array}{llll} a_0 = f_i & b_{-1} = h_i f'_i & c_0 = b_0 - b_{-1} & d_0 = c_1 - c_0 \\ a_1 = f_{i+1} & b_0 = a_1 - a_0 & c_1 = b_1 - b_0 & \\ & b_1 = h_i f'_{i+1} & & \end{array}$$

$$Q_i(t) = a_0 + (b_0 + (c_0 + d_0 t)(t - 1)) t = g(x)$$

Problem: Der Algorithmus ist nur durchführbar, wenn die f'_i bekannt sind; diese sind aber im Allgemeinen nicht verfügbar.

Ausweg: "Bestimmen" der f'_i durch zusätzliche Bedingungen. Dies führt auf das Konzept der *Splines*:

Forderung 1: $P''_i(x_{i+1}) = P''_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-2$.

Das ergibt $n-2$ Bedingungen an die Unbekannten $f'_1, \dots, f'_n$.

Aus $P_i(x) = Q_i\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$ folgt $P''_i(x) = \frac{1}{h_i^2} \ddot{Q}_i\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$. Damit gilt also

$$P''_i(x_{i+1}) = \frac{\ddot{Q}_i(1)}{h_i^2}, \quad P''_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{\ddot{Q}_{i+1}(0)}{h_{i+1}^2}.$$

Somit erhalten wir in der t -Koordinate

Forderung 1:
$$\frac{\ddot{Q}_i(1)}{h_i^2} = \frac{\ddot{Q}_{i+1}(0)}{h_{i+1}^2}.$$

Es gilt:

$$\ddot{Q}_i(t) = f_i(-6 + 12t) + f_{i+1}(6 - 12t) + h_i f'_i(-4 + 6t) + h_i f'_{i+1}(-2 + 6t)$$

Daraus folgt

$$\ddot{Q}_i(1) = 6f_i - 6f_{i+1} + 2h_i f'_i + 4h_i f'_{i+1}$$

$$\ddot{Q}_{i+1}(0) = -6f_{i+1} + 6f_{i+2} - 4h_{i+1} f'_{i+1} - 2h_{i+1} f'_{i+2}.$$

Damit erhalten wir als

Forderung 1:

$$\frac{6}{h_i^2} (f_i - f_{i+1}) + \frac{2}{h_i} f'_i + \frac{4}{h_i} f'_{i+1} = \frac{6}{h_{i+1}^2} (f_{i+2} - f_{i+1}) - \frac{4}{h_{i+1}} f'_{i+1} - \frac{2}{h_{i+1}} f'_{i+2}.$$

Ordnet man die Terme und dividiert durch 2 ergibt sich

$$\underbrace{\frac{1}{h_i} f'_i}_{b_i} + \underbrace{\left(\frac{2}{h_i} + \frac{2}{h_{i+1}} \right) f'_{i+1}}_{a_i} + \underbrace{\frac{1}{h_{i+1}} f'_{i+2}}_{b_{i+1}} = 3 \underbrace{\left(\underbrace{\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2}}_{c_i} + \underbrace{\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h_{i+1}^2}}_{c_{i+1}} \right)}_{d_{i+1}},$$

für $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Die Forderung 1 für die $n-2$ Intervalle sieht also wie folgt aus.

Forderung 1:

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 f'_1 & + & a_1 f'_2 & + & b_2 f'_3 & & = d_2 \\ & & b_2 f'_2 & + & a_2 f'_3 & + & b_3 f'_4 & = d_3 \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{n-2} f'_{n-2} & + & a_{n-2} f'_{n-1} & + & b_{n-1} f'_n & = & d_{n-1} \end{array} \quad (5.2)$$

Das sind n Unbekannte und $n-2$ Gleichungen. Die Unbekannten f'_i , $i = 1, \dots, n$, sind dadurch nicht eindeutig bestimmt. Es fehlen zwei Gleichungen. Wir stellen daher noch eine 2. Forderung auf (vorgeschlagen von C. de Boor):

$$\begin{aligned} \text{Forderung 2:} \quad P_1(x) &\equiv P_2(x) \\ P_{n-2}(x) &\equiv P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese sogenannte *not a knot condition* von de Boor lässt sich auf Grund von Fehleruntersuchungen motivieren: bei Stützstellen mit gleichem Abstand h ist der Interpolationsfehler der Ordnung h^4 .

Aus $P_1(x) \equiv P_2(x)$ folgt $P'_1(x) = P'_2(x)$, $P''_1(x) = P''_2(x)$, $P'''_1(x) = P'''_2(x)$. Die letzte Gleichung impliziert $\ddot{Q}_1(1)/h_1^3 = \ddot{Q}_2(0)/h_2^3$.

Weiter gilt

$$\ddot{Q}_i(t) = 12 f_i - 12 f_{i+1} + 6 h_i f'_i + 6 h_i f'_{i+1},$$

und damit erhalten wir

Forderung 2:

$$\frac{2 f_1}{h_1^3} - \frac{2 f_2}{h_1^3} + \frac{f'_1}{h_1^2} + \frac{f'_2}{h_1^2} = \frac{2 f_2}{h_2^3} - \frac{2 f_3}{h_2^3} + \frac{f'_2}{h_2^2} + \frac{f'_3}{h_2^2},$$

bzw.

$$\frac{1}{h_1^2} f'_1 + \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) f'_2 - \frac{1}{h_2^2} f'_3 = 2 \left(\frac{c_1}{h_1} - \frac{c_2}{h_2} \right).$$

Addiert man zu dieser letzten Gleichung die mit $1/h_2$ multiplizierte oberste Gleichung von (5.2), erhält man

$$\frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) f'_1 + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^2 f'_2 = 2 c_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + \frac{c_1 + c_2}{h_2}.$$

Diese Gleichung geteilt durch $\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)$ ergibt

$$\frac{1}{h_1} f'_1 + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) f'_2 = 2 c_1 + \frac{h_1}{h_1 + h_2} (c_1 + c_2). \quad (5.2)_1$$

Analog erhält man

$$\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}} \right) f'_{n-1} + \frac{1}{h_{n-1}} f'_n = 2 c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_{n-2}} (c_{n-1} + c_{n-2}) \quad (5.2)_n$$

Fügen wir die Gleichungen $(5.2)_1$ und $(5.2)_n$ zu (5.2) hinzu, erhalten wir n Gleichungen für die n Unbekannten $f'_1, \dots, f'_n$.

Bemerkung: Das zu lösende Gleichungssystem für die Unbekannten $f'_1, \dots, f'_n$ hat *tridiagonale Gestalt* und kann daher besonders effizient gelöst werden.

Die Spline-Interpolationsfunktion an der Stelle x kann nun also wie folgt berechnet werden:.

1. Bestimme die Lösung $f'_1, \dots, f'_n$ des tridiagonalen Gleichungssystems $(5.2)_1, (5.2), (5.2)_n$.
2. Bestimme den Wert der Splinefunktion in x nach Hermite.

Ausführlich aufgeschrieben führt das zum folgenden

Algorithmus: (Auswertung der Spline-Interpolationsfunktion g an der Stelle x)

1. Bestimme die Lösung f' des linearen Gleichungssystems $Af' = d$,
wobei

$$A := \begin{pmatrix} b_1 & \frac{a_1}{2} & & & \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & b_2 & a_2 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-1} \\ & & & & \frac{a_{n-2}}{2} & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$b_i := \frac{1}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$a_i := 2(b_i + b_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-2$$

$$c_i := \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$d_1 := 2c_1 + \frac{h_1}{h_1 + h_2}(c_1 + c_2)$$

$$d_i := 3(c_{i-1} + c_i), \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$d_n := 2c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_{n-2}}(c_{n-1} + c_{n-2}).$$

2. Bestimme den Index i für den gilt $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.
3. Setze $t = \frac{x - x_i}{h_i}$.
4. Berechne $Q_i(t) = a_0 + (b_0 + (c_0 + d_0 t)(t - 1))t$, wobei

$$\begin{array}{ccccc} & b_{-1} = h_i f'_i & \searrow & & \\ a_0 = f_i & \searrow & & \nearrow & c_0 = b_0 - b_{-1} \searrow \\ & b_0 = a_1 - a_0 & & & d_0 = c_1 - c_0. \\ a_1 = f_{i+1} & \nearrow & & \searrow & \\ & b_1 = h_i f'_{i+1} & \nearrow & & c_1 = b_1 - b_0 \nearrow \end{array}$$

5. $g(x) = Q_i(t)$.

Bemerkungen:

- Die Matrix des linearen Gleichungssystems $(5.2)_1, (5.2), (5.2)_n$ ist strikt diagonal-dominant (d.h. $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$) mit positiven Diagonalelementen.

Daraus folgt nach dem Kriterium von Gerschgorin, dass ihre Eigenwerte alle positiv sind. Damit ist die Matrix regulär und es folgt, dass die f'_i eindeutig bestimmt sind und damit auch die Spline-Interpolationsfunktion.

Zudem folgt daraus, dass die Lösung dieses tridiagonalen Gleichungssystems mit dem Gaußalgorithmus mit Diagonalstrategie gelöst werden kann. Dabei soll die Symmetrie berücksichtigt werden.

- Die f'_i sind die Ableitungen der Splinefunktion an den Stellen x_i (und daher Näherungen zu den Ableitungen von $f(x)$ an diesen Stellen).
- Der Interpolationsfehler der Spline-Interpolationsfunktion ist von der Ordnung $O(h^4)$ (bei gleichabständigen Intervallen $h_i \equiv h$, $i = 1, \dots, n$); die Abweichung in der 1. Ableitung ist von der Ordnung $O(h^3)$.
- Wir haben hier die *kubische Spline-Interpolation* behandelt. Es gibt auch Spline-Interpolation höherer Ordnung.

Andere Randbedingungen

Anstelle der 'not a knot'-Bedingung kann man auch andere Bedingungen stellen. Wir erwähnen zwei:

i) *Forderung 2:*

$$P''_1(x_1) = P''_{n-1}(x_n) = 0$$

Man nennt das eine *natürliche Randbedingung*, und sie führt auf die *natürliche Spline-Interpolationsfunktion*.

ii) *Forderung 2:*

$$P''_1(x_1) = P''_{n-1}(x_n)$$

zur Interpolation einer periodischen Funktion. Das in diesem Fall $f_1 = f_n$ und $f'_1 = f'_n$, gibt es nur $n - 1$ Unbekannte $f'_1, \dots, f'_{n-1}$, und es braucht nur eine zusätzliche Gleichung zu (5.2).

Beispiel für eine periodische Spline-Interpolationsfunktion:

Wir betrachten $f(x) = \sin(\pi x)$ und geben die folgenden Stützstellen und Stützwerte vor:

x_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f_i	0	1	0	-1	0

Damit ist $n = 5$, $h = \frac{1}{2}$.

Forderung 2:
$$\frac{\ddot{Q}_1(0)}{h^2} = \frac{\ddot{Q}_{n-1}(1)}{h^2}$$

Mit

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_1(0) &= -6f_1 + 6f_2 - 4hf'_1 - 2hf'_2 \\ \ddot{Q}_{n-1}(1) &= 6f_{n-1} - 6f_n + 2hf'_{n-1} + 4hf'_n ,\end{aligned}$$

Division durch $-h$ und Benutzen, dass $f_n = f_1$ und $f'_n = f'_1$ gilt, ist die Forderung 2 äquivalent zu

$$8f'_1 + 2f'_2 + 2f'_{n-1} = \frac{6}{h}(f_2 - f_{n-1}) .$$

Fügt man diese Gleichung oben bei (5.2) an, erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieses besitzt die Lösung

$$f' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die 'exakten' Ableitungen von $f(x)$ an diesen Stützstellen sind $\pi, 0, -\pi, 0$.