8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel: Radioaktiver Zerfall
Sei $m(t)$ die Menge radioaktiven Materials zur Zeit t. Dann gilt

$$\frac{dm(t)}{dt} = \lambda\, m(t) \;,$$

wobei λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Funktionen $m(t) = ae^{-\lambda t},\; a \in \mathbb{R}$, sind Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung. Falls $m(t_0) = m_0$ vorausgesetzt wird, ist $m(t) = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$ die eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems.

Problemstellung:

Definition: Für eine gegebene Funktion $f(t,x)$, heisst

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{8.1}$$

(skalare) *gewöhnliche Differentialgleichung* (*1. Ordnung*).

Gesucht ist eine *Lösung* $x(t)$ der Differentialgleichung (8.1), d.h. eine Funktion $x(t)$, für die $\dot{x} = f(t, x(t))$ gilt. Differentialgleichungen haben viele Lösungen. Um eine bestimmte Lösung auszuzeichnen, müssen zusätzliche Bedingungen gestellt werden.

Definition: Verlangt man zusätzlich zu (8.1) noch

$$x(t_0) = x_0 \tag{8.2}$$

für vorgegebenes x_0, t_0, nennt man (8.1), (8.2) ein *Anfangswertproblem.*

Gesucht ist die *Lösung* $x(t)$ des Anfangswertproblems (8.1), (8.2), d.h. eine Funktion $x(t)$, für die gilt:

i) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$

ii) $x(t_0) = x_0$.

Unter vernünftigen Bedingungen an die Funktion f besitzt ein Anfangswertproblem eine *eindeutige* Lösung.

Beispiel: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \frac{x^2}{t},\; x(1) = 1\,.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist

$$x(t) = \frac{1}{1 - \ln t} \,.$$

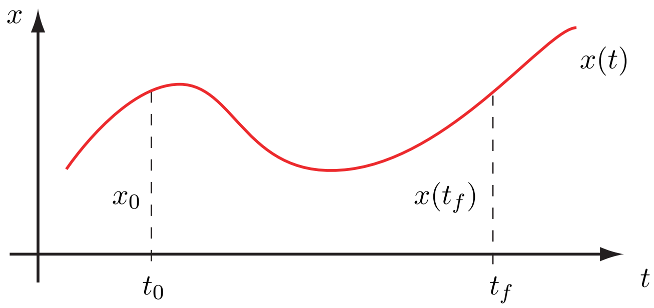
Da man nur in einfachen Fällen die Lösung eines Anfangswertproblems in geschlossener analytischer Form angeben kann, sind numerische Methoden gefragt.

Numerische Fragestellung

Gegeben seien das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(t_0) = x_0$$

sowie eine Endstelle t_f, und gesucht sei eine Approximation für $x(t_f)$.



Grundidee: Unterteile das Intervall $[t_0, t_f]$ in Teilintervalle: $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_f$, und approximiere sukzessive $x(t_1),\; x(t_2),\; \ldots,\; x(t_n)$. Damit wird das ursprünglich globale Problem in eine Folge lokaler Probleme zerlegt.
Dieser Zugang beruht auf der *Taylorformel* für die Funktion x an einer Stelle $t+h$:

$$x(t+h) = x(t) + \dot{x}(t)h + \ddot{x}(t)\frac{h^2}{2} + \ldots + x^{(p)}(t)\frac{h^p}{p!} + \underbrace{x^{(p+1)}(\tau)\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}}_{\text{Restglied}}, \quad \tau \in (t, t+h)\,,$$

d.h. aus der Kenntnis der Funktion x an einer Stelle t (mit noch zusätzlichen Ableitungen) erhalten wir Information über die Funktion an der Stelle $t+h$.

Wir folgern aus der Taylorformel, dass das *Taylorpolynom vom Grad* p an der Stelle t,

$$x(t) + \dot{x}(t)h + \ldots + x^{(p)}(t)\frac{h^p}{p!}\,,$$

$x(t+h)$ approximiert mit einem Fehler der Ordnung $O(h^{p+1})$.