
9 Partielle Differentialgleichungen

Bei partiellen Differentialgleichungen ist die Unbekannte eine Funktion mehrerer unabhängiger Variablen; zum Beispiel:

$u(x, y)$ x, y Koordinaten in der Ebene;

$u(t, x)$ t Zeit, x Ortskoordinate;

$u(t, x, y)$ t Zeit und x, y Koordinaten in der Ebene.

Die Funktion u wird bestimmt durch eine Differentialgleichung und durch zusätzliche Bedingungen.

Wir betrachten die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (in zwei unabhängigen Variablen):

$$A \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + D \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + E \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + Fu(x, y) = f(x, y) \quad (9.1)$$

wobei $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ ist. Eine solche Gleichung wird üblicherweise mit $\Delta := AC - B^2$ wie folgt klassiert:

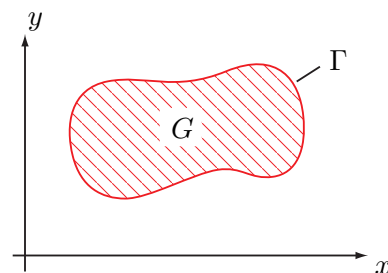
- a) $\Delta > 0$: Gleichung (9.1) heisst *elliptisch*
- b) $\Delta = 0$: Gleichung (9.1) heisst *parabolisch*
- c) $\Delta < 0$: Gleichung (9.1) heisst *hyperbolisch*

Wir betrachten je ein Beispiel für a), b), c).

Beispiel 1: Poissongleichung in der Ebene (elliptisch)

Gegeben:

- 1. Grundgebiet G in der Ebene mit Rand Γ
- 2. $f(x, y)$ in G
- 3. $\varphi(x, y)$ auf Γ



Gesucht ist eine Funktion $u(x, y)$, so dass gilt:

i)

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in G$$

ii)

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Gamma$$

Bemerkungen:

- Die partielle Differentialgleichung i) heisst Poissonsgleichung; die Bedingung ii) heisst *Dirichlet-Randbedingung*; i) und ii) zusammen nennt man eine *Randwertaufgabe*.
- Die Lösung der Poissonsgleichung beschreibt die stationäre Temperaturverteilung in einem homogenen Medium oder den Spannungszustand bei gewissen Torsionsproblemen.

Beispiel 2: Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (parabolisch)

Gegeben: $f(x)$ für $x \in (0, 1)$; $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ für $t > 0$.

Gesucht ist eine Funktion $u(t, x)$ so dass gilt:

i)

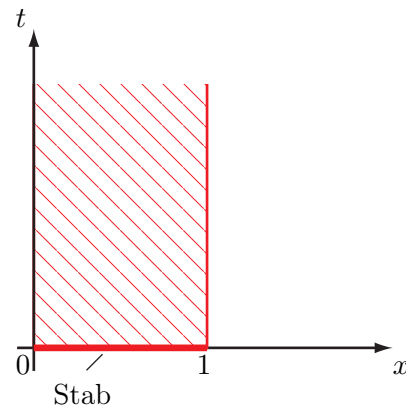
$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

ii)

$$u(0, x) = f(x) \text{ für } x \in (0, 1)$$

iii)

$$u(t, 0) = \alpha(t), u(t, 1) = \beta(t) \text{ für } t \geq 0$$



Bemerkung: Die partielle Differentialgleichung i) heisst Wärmeleitungsgleichung; die Bedingung ii) ist eine *Anfangsbedingung*; die Bedingungen iii) sind *Randbedingungen*; i)-iii) heisst *Anfangs-Randwertaufgabe*.

Beispiel 3: Eindimensionale Wellengleichung (hyperbolisch)

Gegeben: $u_0(x)$, $u_1(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Gesucht ist eine Funktion $u(t, x)$, so dass gilt:

i)

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

ii)

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x)$$

Bemerkung: Die partielle Differentialgleichung i) heisst Wellengleichung; die Bedingung ii) ist eine *Anfangsbedingung*; i), ii) heisst *Anfangswertaufgabe*.

9.1 Parabolische Probleme

Wir betrachten das folgende Modellproblem (eindimensionale Wärmeleitungsgleichung):

Gesucht sei die Funktion $u(t, x)$, so dass

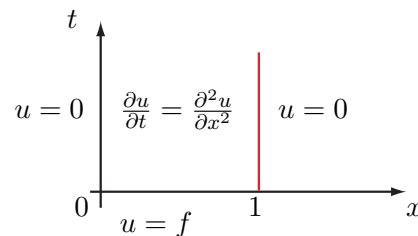
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gilt mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in (0, 1)$$

und der Randbedingung

$$u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.$$



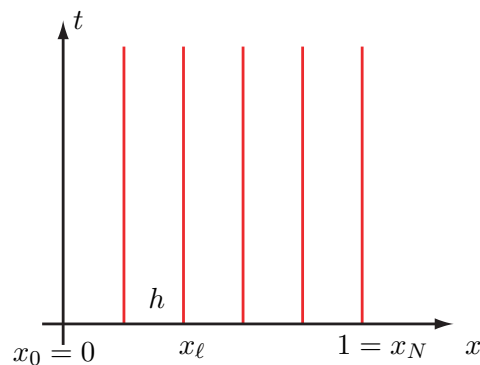
Die 'Method of lines' (Semidiskretisierung)

Idee: Diskretisierung in der Ortskoordinate x , dann Anwendung der Methoden der numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Wir approximieren $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$ durch den symmetrischen Differenzenquotienten (s. Kap. 7):

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2} + O(h^2); \quad (9.2)$$

und wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in N Teilintervalle der Länge $h = 1/N$ ein: $x_\ell = \ell h$, $\ell = 0, 1, \dots, N$:



Wir definieren eine Approximation $u_\ell(t)$ für $u(t, x_\ell)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 0, \quad u_N(t) = 0 \\ \dot{u}_\ell(t) &= \frac{u_{\ell+1}(t) - 2u_\ell(t) + u_{\ell-1}(t)}{h^2}, \quad \ell = 1, \dots, N-1 \\ u_\ell(0) &= f(x_\ell) \end{aligned}$$

Wir machen dabei zwei Fehler im Ort x : den Diskretisationsfehler $O(h^2)$ durch Weglassen der höheren Terme in (9.2) sowie den zweiten Fehler durch das Einsetzen der Approximation in den Differenzenquotienten anstelle der exakten Lösung.

Vektorschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_{N-1} \end{pmatrix}}_{\underline{\dot{u}}} = \frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=: \hat{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}}_{\underline{u}}$$

Mit $A := \frac{1}{h^2} \hat{A}$ erhalten wir das folgende Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\underline{\dot{u}} = A\underline{u}, \quad \underline{u}(0) = \underline{f} := \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Wenden wir darauf das explizite Eulerverfahren mit Zeitschritt $\bar{h}$ an, d.h. $t_j = j\bar{h}$, $j = 0, 1, \dots$ (Diskretisationsfehler in der Zeit t), $\tilde{u}_j$ Approximation von $\underline{u}(t_j)$, erhalten wir die sogenannte

Richardson-Methode

$$\underline{\tilde{u}}^{j+1} = \underline{\tilde{u}}^j + \bar{h} A \underline{\tilde{u}}^j = (I + \frac{\bar{h}}{h^2} \hat{A}) \underline{\tilde{u}}^j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Wenden wir auf (9.3) die Trapezmethode an:

$$\underline{\tilde{u}}^{j+1} = \underline{\tilde{u}}^j + \frac{\bar{h}}{2} [A \underline{\tilde{u}}^j + A \underline{\tilde{u}}^{j+1}],$$

erhalten wir die sogenannte

Methode von Crank-Nicolson

$$(2I - \frac{\bar{h}}{h^2} \hat{A}) \underline{\tilde{u}}^{j+1} = (2I + \frac{\bar{h}}{h^2} \hat{A}) \underline{\tilde{u}}^j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Bemerkung: Bei der Richardson-Methode hat man pro Schritt eine Matrix-Vektor-Multiplikation (je mit der gleichen Matrix). Bei der Methode von Crank-Nicolson muss zusätzlich ein lineares Gleichungssystem gelöst werden (je mit der gleichen Koeffizientenmatrix, d.h. nur am Anfang eine LR-Zerlegung).

Wir wollen die beiden Methoden genauer untersuchen. Das zu approximierende lineare (gewöhnliche) Differentialgleichungssystem hat die Form

$$\dot{\underline{u}} = A\underline{u}, \quad A := \frac{1}{h^2} \hat{A}.$$

Es gilt: $\hat{A}$ hat Eigenwerte $\hat{\lambda}_\ell = -4 \sin^2(\frac{\ell\pi}{2N})$; und daher hat A die Eigenwerte

$$\lambda_\ell = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\ell\pi}{2N}, \quad \ell = 1, \dots, N-1, \quad h := \frac{1}{N}.$$

Bemerkung: Für $\ell = 1$ ist $\sin(\pi h/2) \cong \pi h/2$, $h := 1/N$, d.h. $\lambda_1 \approx -\pi^2$; für $\ell = N-1$ ist $\sin(\dots) \approx 1$, d.h. $\lambda_{N-1} \approx -4/h^2$. Das bedeutet, dass für kleine h das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{\underline{u}} = A\underline{u}$ 'sehr' *steif* ist.

Wir wenden das Stabilitätskonzept von Kap. 8 an. Das reelle Stabilitätsintervall des expliziten Eulerverfahrens ist $(-2, 0)$, das ergibt die folgende Bedingung an $\bar{h}$:

$$-4 \frac{\bar{h}}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{2} \right) \in (-2, 0), \quad \ell = 1, \dots, N-1,$$

bzw.

$$\frac{\bar{h}}{h^2} < \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\ell\pi}{2N}}. \quad (9.4)$$

Wegen

$$1 < \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{N-1}{N} \frac{\pi}{2} \right)} \leq \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\ell}{N} \frac{\pi}{2} \right)}, \quad \ell = 1, \dots, N-1$$

gilt: Die Bedingung (9.4) ist erfüllt für beliebig grosse N , falls

$$\frac{\bar{h}}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (9.5)$$

Dies bedeutet bei vorgegebener Ortsdiskretisierung h eine Einschränkung für den Zeitschritt $\bar{h}$ des expliziten Eulerverfahrens.

Die Trapezmethode ist A-stabil. Deshalb gibt es keine Einschränkung für den Schritt $\bar{h}$ der Methode von Crank-Nicolson.

Beispiel:

a) Richardson-Methode mit $h = 0.1$, $\bar{h} = 0.001$, $\frac{\bar{h}}{h^2} = 0.1$

t	Approx. für $x = 0.3$	$u(t, 0.3)$	Fehler	in %
0.01	0.5822	0.5799	0.0023	0.4
0.02	0.5373	0.5334	0.0039	0.7
0.10	0.2472	0.2444	0.0028	1.1

b) Methode von Crank-Nicolson mit $h = 0.1$, $\bar{h} = 0.01$, $\frac{\bar{h}}{h^2} = 1$

t	Approx. für $x = 0.5$	$u(t, 0.5)$	Fehler	in %
0.01	0.7691	0.7743	-0.0052	-0.7
0.02	0.6921	0.6809	0.0112	1.6
0.10	0.3069	0.3021	0.0048	1.6

Bemerkung: Es gilt, dass der globale Fehler der Richardson-Methode von der Ordnung $O(h^2) + O(\bar{h})$ und derjenige der Methode von Crank-Nicolson von der Ordnung $O(h^2) + O(\bar{h}^2)$ ist (vgl. Abschn. 9.2 und Kapitel), was durch das numerische Experiment bestätigt wird. Obwohl in Experiment b) $O(h^2) + O(\bar{h}) = O(10^{-2})$, also klein ist, und die gleiche Größenordnung hat wie in Experiment a), kann die Richardson-Methode hier nicht angewendet werden, da die Bedingung (9.5) verletzt ist.

9.2 Elliptische Probleme

Wir betrachten als Modellproblem die *Poissongleichung im Einheitsquadrat*.

Gegeben:

1. Einheitsquadrat G in der x - y -Ebene
2. $f(x, y)$ in G
3. $\varphi(x, y)$ auf dem Rand Γ

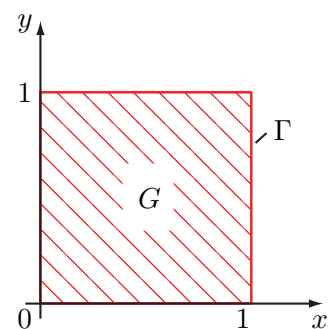
Gesucht ist eine Funktion $u(x, y)$, so dass gilt:

i)

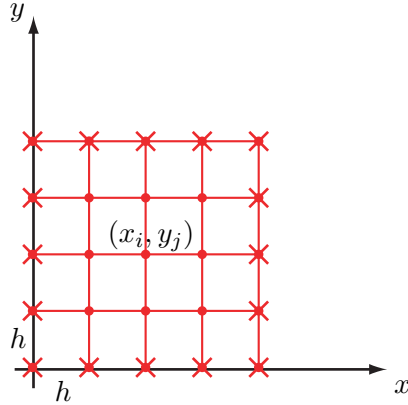
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in G \quad (9.6)$$

ii)

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Gamma$$



Lösungsidee: Wir diskretisieren das Problem, indem wir ein quadratisches Gitter mit Maschenweite $h := \frac{1}{N}$ über das Gebiet G legen.



$$x_i = ih, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$$y_j = jh$$

- $(N - 1)^2$ innere Gitterpunkte
 - ✕ $4N$ Randpunkte
- (In der Skizze ist $N = 4$.)

Ziel: Näherungsweise Berechnung von $u(x, y)$ an den inneren Gitterpunkten, d.h. suche Approximation $\tilde{u}_{ij}$ für $u(x_i, y_j)$.

Methode: Approximation der zwei partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ durch symmetrische Differenzenkoeffizienten.

Es gilt:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)}{h^2} + O(h^2).$$
(9.7)

Beweis mit Taylorentwicklung (siehe auch Kap. 7):

Wir benutzen die *Notation*:

$$D_1 := \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_1^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \dots$$

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = (D_1^2 + D_2^2)u(x, y)$$

Damit erhalten wir mit Taylorentwicklung in h :

$$u(x + h, y) = (1 + hD_1 + \frac{h^2}{2}D_1^2 + \frac{h^3}{6}D_1^3 + \frac{h^4}{24}D_1^4 + \dots) u(x, y)$$

$$u(x - h, y) = (1 - hD_1 + \frac{h^2}{2}D_1^2 - \frac{h^3}{6}D_1^3 + \frac{h^4}{24}D_1^4 - \dots) u(x, y)$$

und daraus

$$u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y) = (h^2 D_1^2 + \frac{h^4}{12} D_1^4 + \dots) u(x, y).$$

Analog für y .

□

Setzen wir (9.7) für $x = x_j$, $y = y_j$ mit $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ in die Differentialgleichung (9.6) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u(x_i, y_j) - f_{ij} = \\ &= \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)] - f_{ij} \\ &\quad - \frac{h^2}{12} (D_1^4 + D_2^4)u(x_i, y_j) - \dots \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion u , die Lösung der Differentialgleichung (9.6), erfüllt also auf dem Gitter diese Beziehung. Lassen wir nun die Terme von der Ordnung $O(h^2)$ und höher weg, können wir eine Approximation $\tilde{u}_{ij}$ für $u(x_i, y_j)$ von der Ordnung $O(h^2)$ bestimmen.

Algorithmus: (Differenzverfahren (5-Punkte-Formel))

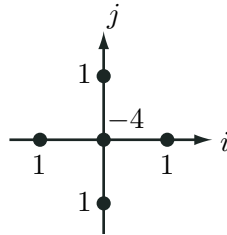
Bestimme die Approximation $\tilde{u}_{ij}$ für $u(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, N-1$, aus

$$\frac{1}{h^2} [\tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i,j-1} - 4\tilde{u}_{ij}] = f_{ij}, \quad (9.8)$$

wobei $f_{ij} := f(x_i, y_j)$.

Bemerkungen:

- In jedem inneren Punkt gilt eine lineare Gleichung der Form (9.8). Das ergibt auf dem Gitter ein Gleichungssystem der Dimension $N-1$.
- Symbolisch wird das Verfahren durch den 5-Punkt-Differenzenstern charakterisiert:



Definition: Der Fehler, den man erhält, wenn man die exakte Lösung in ein Differenzenverfahren einsetzt, heisst *lokaler Diskretisationsfehler*.

Folgerung: Das Differenzenverfahren (9.8) hat den lokalen Diskretisationsfehler $O(h^2)$.

Bemerkung: Die Definition des lokalen Diskretisationsfehlers ist verschieden von der Definition des lokalen Fehlers bei den numerischen Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (s. Kap. 8). Wir betrachten als Beispiel das explizite Eulerverfahren angewandt auf $\dot{x} = f(x)$:

$$\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + hf_j, \quad f_j := f(\tilde{x}_j), \quad j = 0, 1, \dots$$

Ersetzt man $\dot{x}$ auf dem Gitter $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots$, durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten, erhält man für die Approximation $\tilde{x}_j$

$$\frac{\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j}{h} - f_j = 0.$$

Setzt man in dieses Differenzenverfahren die exakte Lösung $x(t)$ ein und entwickelt nach h , ergibt sich

$$\frac{[x(t_j) + hf(x(t_j)) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(t_j) + \dots] - x(t_j)}{h} - f(x(t_j)) = \frac{h}{2}\ddot{x}(t_j) + O(h^2).$$

D.h. das Eulerverfahren hätte so den lokalen Diskretisationsfehler $O(h)$ nicht $O(h^2)$ wie im Kap. 8 definiert. Umgekehrt hätte das Verfahren (9.8) nach ODE-Definition den lokalen Diskretisationsfehler $O(h^4)$.

Beispiel: Wir stellen das Gleichungssystem des Differenzenverfahrens für den einfachen Fall

$$N = 4, \quad f(x, y) = -1, \quad \varphi(x, y) = 0$$

auf. Wie nummerieren die Unbekannten $\tilde{u}_{ij}$ wie folgt um:

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_{1,1} \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_{2,1} \quad \tilde{u}_3 = \tilde{u}_{3,1}$$

$$\tilde{u}_4 = \tilde{u}_{1,2} \quad \tilde{u}_5 = \tilde{u}_{2,2} \quad \tilde{u}_6 = \tilde{u}_{3,2}$$

$$\tilde{u}_7 = \tilde{u}_{1,3} \quad \tilde{u}_8 = \tilde{u}_{2,3} \quad \tilde{u}_9 = \tilde{u}_{3,3}$$

Nach Multiplikation der Gleichungen mit $h^2 = \frac{1}{16}$ ergibt sich so das folgende lineare Gleichungssystem der Dimension 9:

$\tilde{u}_1$	$\tilde{u}_2$	$\tilde{u}_3$	$\tilde{u}_4$	$\tilde{u}_5$	$\tilde{u}_6$	$\tilde{u}_7$	$\tilde{u}_8$	$\tilde{u}_9$	1
-4	+1		+1						-0.0625
+1	-4	+1		+1					-0.0625
	+1	-4			+1				-0.0625
+1			-4	+1		+1			-0.0625
	+1		+1	-4	+1		+1		-0.0625
		+1		+1	-4			+1	-0.0625
			+1			-4	+1		-0.0625
				+1		+1	-4	+1	-0.0625
					+1		+1	-4	-0.0625

Formal geschrieben haben wir also das lineare Gleichungssystem

$$A\tilde{\underline{u}} = \underline{f}$$

mit Koeffizientenmatrix A , die dünnbesetzt (sparse) ist; und $-A$ ist symmetrisch positiv definit. Das lineare Gleichungssystem kann daher mit dem CG-Verfahren gelöst werden (s. Abschn. 2.2).

Zusammengefasst: Die numerische Approximation der Poissongleichung (9.6) auf dem Einheitsquadrat mit dem Differenzenschema (9.8) führt auf ein lineares Gleichungssystem der Dimension $(N-1)^2$.

Bemerkung: In der Praxis kann die Dimension von A sehr gross werden (oft $N \cong 1000$ d.h. $\cong 10^6$ Gleichungen, bzw in 3 Dimensionen $\cong 10^9$ Gleichungen).

Wir wollen noch das *Fehlerverhalten* des Differenzenverfahrens (9.8) mit einem numerischen Experiment untersuchen an der Stelle $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (exakte Lösung: $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0.0736713$).

$h^2 \cong$	N	Approximation für $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	Fehler $\cong$
$6 \cdot 10^{-2}$	4	0.0703	$3.36 \cdot 10^{-3}$
	8	0.0727826	$8.80 \cdot 10^{-4}$
$4 \cdot 10^{-3}$	16	0.0734457	$2.26 \cdot 10^{-4}$
	32	0.0736147	$5.66 \cdot 10^{-5}$
$1.5 \cdot 10^{-5}$	64	0.0736571	$1.41 \cdot 10^{-5}$

Der beobachtete globale Fehler ist von der Ordnung $O(h^2)$, d.h. das Differenzenverfahren (9.8) scheint Fehlerordnung 2 zu haben, d.h. die Ordnung des globalen Fehlers ist gleich der Ordnung des lokalen Diskretisationsfehlers (anders als im Kap. 8)

Es gilt: Das Differenzenverfahren (9.8) hat die Fehlerordnung 2.

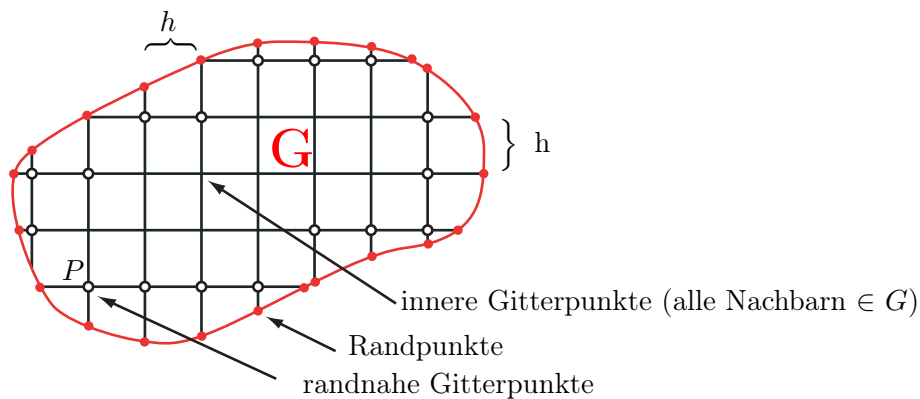
Das Dirichlet-Problem ($f \equiv 0$) in allgemeinen Gebieten

Wir betrachten

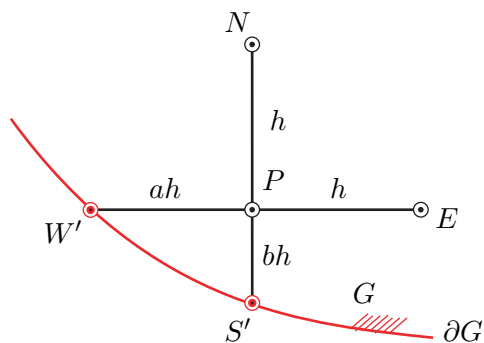
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } G$$

$$u = \varphi \text{ auf } \partial G$$

und legen ein Gitter wie folgt:



Wir leiten eine Approximation von Δu in randnahen Gitterpunkten her.



Gleiche Idee wie vorher: $\Delta u(P)$ approximativ ausdrücken durch u_E , u_N , $u_{W'}$, $u_{S'}$ (5-Punkte-Formel).
Methode: Taylorreihen

Wir betrachten zuerst die x -Richtung (wir schreiben (x, y) anstatt (x_i, y_j)).

$$\begin{array}{lcl} c_3 \cdot & u(P) & = u(x, y) \\ c_1 \cdot & u(E) & = u(x+h, y) = u(P) + h u_x(P) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(P) + \dots \\ c_2 \cdot & u(W') & = u(x-ah, y) = u(P) - ah u_x(P) + \frac{1}{2} a^2 h^2 u_{xx}(P) + \dots \end{array}$$

$$\text{Bedingung: } c_1 u(E) + c_2 u(W') + c_3 u(P) \stackrel{!}{=} u_{xx}(P) + \dots$$

Bemerkung: Im Innern gilt: $c_1 = c_2 = 1/h^2$; $c_3 = -2/h^2$ (s. (9.7)).

Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} c_1 u(E) + c_2 u(W') + c_3 u(P) &= \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_{\stackrel{!}{=}0} u(P) + \\ &+ \underbrace{(c_1 - a c_2)}_{\stackrel{!}{=}0} h u_x(P) + \underbrace{\frac{h^2}{2} (c_1 + a^2 c_2)}_{\stackrel{!}{=}1} u_{xx}(P) + \dots \end{aligned}$$

Dies sind drei Bedingungen für die drei Unbekannten c_1, c_2, c_3 , und wir finden die Lösung:

$$c_1 = \frac{2}{h^2(1+a)}, \quad c_2 = \frac{2}{h^2 a(1+a)}, \quad c_3 = -\frac{2}{h^2 a}.$$

Die analoge Rechnung gilt in y -Richtung (Parameter b). Damit erhalten wir die folgende 5-Punkte-Formel für einen randnahen Gitterpunkt P :

$$\frac{2}{h^2} \left[\frac{\tilde{u}(E)}{1+a} + \frac{\tilde{u}(N)}{1+b} + \frac{\tilde{u}(W')}{a(1+a)} + \frac{\tilde{u}(S)}{b(1+b)} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \tilde{u}(P) \right] = 0.$$

Bemerkung: Diese Formel gilt auch in einem inneren Punkt, nämlich mit $a = b = 1$, und entspricht dann (9.8) (mit $f \equiv 0$).