

Bemerkung: Im Innern gilt: $c_1 = c_2 = 1/h^2$; $c_3 = -2/h^2$ (s. (9.7)).

Es muss also gelten:

$$c_1 u(E) + c_2 u(W') + c_3 u(P) = \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_{\stackrel{!}{=}0} u(P) + \underbrace{(c_1 - ac_2)}_{\stackrel{!}{=}0} h u_x(P) + \underbrace{\frac{h^2}{2}(c_1 + a^2 c_2)}_{\stackrel{!}{=}1} u_{xx}(P) + \dots$$

Dies sind drei Bedingungen für die drei Unbekannten c_1, c_2, c_3 , und wir finden die Lösung:

$$c_1 = \frac{2}{h^2(1+a)}, \quad c_2 = \frac{2}{h^2 a(1+a)}, \quad c_3 = -\frac{2}{h^2 a}.$$

Die analoge Rechnung gilt in y -Richtung (Parameter b). Damit erhalten wir die folgende 5-Punkte-Formel für einen randnahen Gitterpunkt P :

$$\frac{2}{h^2} \left[\frac{\tilde{u}(E)}{1+a} + \frac{\tilde{u}(N)}{1+b} + \frac{\tilde{u}(W')}{a(1+a)} + \frac{\tilde{u}(S)}{b(1+b)} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \tilde{u}(P) \right] = 0.$$

Bemerkung: Diese Formel gilt auch in einem inneren Punkt, nämlich mit $a = b = 1$, und entspricht dann (9.8) (mit $f \equiv 0$).

9.3 Hyperbolische Probleme

Wir betrachten die *eindimensionale Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0; \quad c > 0, \tag{9.9}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \tag{9.10}$$

und führen neue Koordinaten ein:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Dann ist

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2c},$$

und wir definieren

$$\bar{u}(\xi, \eta) := u\left(\frac{\xi - \eta}{2c}, \frac{\xi + \eta}{2}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} u_x &= \bar{u}_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \bar{u}_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta \\ u_t &= \bar{u}_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{u}_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = c\bar{u}_\xi - c\bar{u}_\eta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (\bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta)_\xi + (\bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta)_\eta = \bar{u}_{\xi\xi} + 2\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{u}_{\eta\eta} \\ u_{tt} &= c^2(\bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta)_\xi - c^2(\bar{u}_\xi - \bar{u}_\eta)_\eta = c^2(\bar{u}_{\xi\xi} - 2\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{u}_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten hat die Gleichung (9.9) also die Form

$$\bar{u}_{\xi\eta} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung

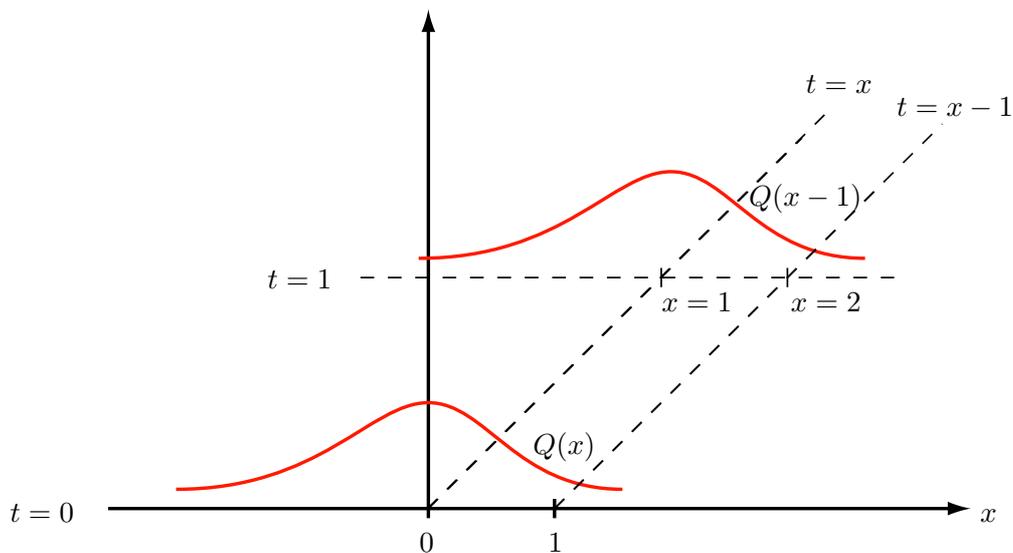
$$\bar{u}(\xi, \eta) = P(\xi) + Q(\eta)$$

für beliebige Funktionen P, Q . Somit erhalten wir die allgemeine Lösung von (9.9):

$$u(t, x) = P(x + ct) + Q(x - ct). \quad (9.11)$$

Für $x + ct = \text{const}$ ist $P(x + ct) = \text{const}$, d.h. ein mit Geschwindigkeit c nach links wanderndes Signal. Analog ist $Q(x - ct) = \text{const}$ für $x - ct = \text{const}$ ein mit Geschwindigkeit c nach rechts wanderndes Signal.

Beispiel: $c = 1$, $x - t = \text{const}$: Q ist konstant längs den Geraden $t = x/c - \text{const}$.



Definition: Die Geraden (Strahlen) $x \pm ct = \text{const}$ heissen *Charakteristiken* der Gleichung (9.9).

Die Funktionen P, Q lassen sich aus der Anfangsbedingung (9.10) bestimmen. Für $t = 0$ ist $\xi = x, \eta = x$ und damit gilt:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \bar{u}(x, x) = P(x) + Q(x) \stackrel{!}{=} \varphi(x) \\ u_t(0, x) &= c[\bar{u}_\xi(x, x) - \bar{u}_\eta(x, x)] = c[P'(x) - Q'(x)] \stackrel{!}{=} \psi(x). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung impliziert

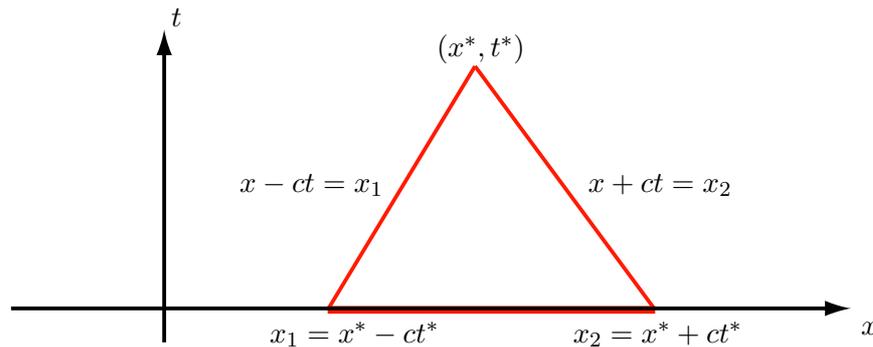
$$P(x) - Q(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + \underbrace{P(0) - Q(0)}_{=:K},$$

und daraus folgt mit $P(x) + Q(x) = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{K}{2} \\ Q(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{K}{2} \end{aligned}$$

bzw. nach (9.11):

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi ds.$$



Der Wert der Lösung $u(t, x)$ im Punkt (x^*, t^*) hängt nur von den Werten der Anfangsdaten φ, ψ im Abhängigkeitsintervall $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$ ab (*analytisches Abhängigkeitsgebiet*).

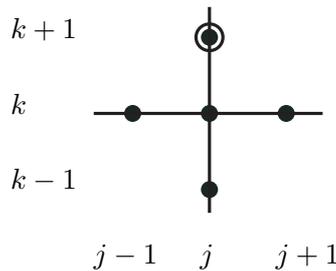
Bemerkung: Falls $\psi \equiv 0$, hängt die Lösung $u(t, x)$ im Punkt (x^*, t^*) mit von den Randpunkten des Abhängigkeitsintervalls ab, und die Anfangsdaten laufen in den charakteristischen Richtungen auseinander.

Numerische Approximation

Diskretisation der Gleichung (9.9) mit symmetrischen Differenzenquotienten (Gitter $\Delta t, \Delta x$), Weglassen der Terme der Ordnung $O(\Delta t^2)$ und $O(\Delta x^2)$ und Einsetzen der Approximation \tilde{u}_j^k für $u(t_j, x_j)$ ergibt das numerische Verfahren:

$$\frac{1}{\Delta t^2} \left(\tilde{u}_j^{k+1} - 2\tilde{u}_j^k + \tilde{u}_j^{k-1} \right) = \frac{c^2}{\Delta x^2} \left(\tilde{u}_{j+1}^k - 2\tilde{u}_j^k + \tilde{u}_{j-1}^k \right) \quad (9.12)$$

mit dem folgenden Differenzenstern:



Der lokale Diskretisierungsfehler ist von der Ordnung $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$.

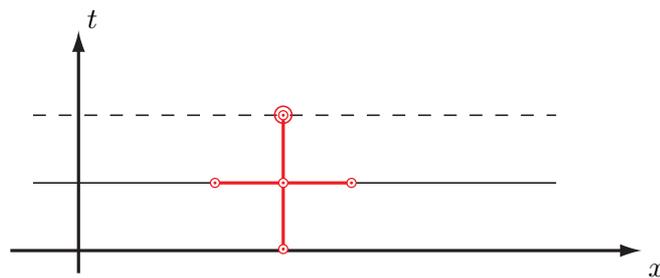
Mit der Definition der sogenannten *Courant-Zahl*

$$\lambda := c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

können wir (9.12) schreiben als

$$\tilde{u}_j^{k+1} = 2\tilde{u}_j^k + \lambda^2 (\tilde{u}_{j+1}^k - 2\tilde{u}_j^k + \tilde{u}_{j-1}^k) - \tilde{u}_j^{k-1}. \quad (9.13)$$

Daraus folgern wir: Falls die $\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^1$ bekannt sind für alle $j \in \mathbb{Z}$, können die \tilde{u}_j^k für alle $k > 0$ berechnet werden.



Wir kennen

$$\tilde{u}_j^0 = \varphi(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Die \tilde{u}_j^1 können näherungsweise aus der Taylor-Entwicklung berechnet werden:

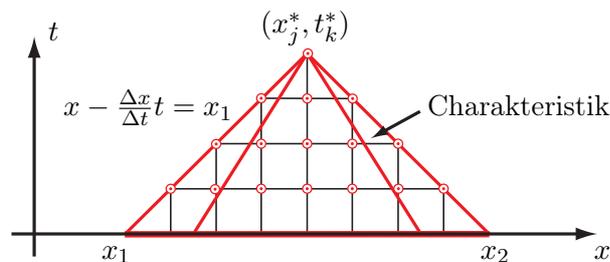
$$u(\Delta t, x) = \underbrace{u(0, x)}_{=\varphi(x)} + \underbrace{u_t(0, x)}_{\psi(x)} \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt}(0, x) \Delta t^2 + \dots$$

Dies impliziert $u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j) + \Delta t \cdot u_t(0, x_j) + O(\Delta t^2)$. Wir setzen also (lokaler Diskretisationsfehler $O(\Delta t^2)$)

$$\tilde{u}_j^1 := \tilde{u}_j^0 + \Delta t \cdot \psi(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Frage: Konvergiert die Methode (9.13)?

Das *numerische Abhängigkeitsgebiet* der Lösung des Differenzenverfahrens (9.13) (bzw.(9.12)) im Punkt (x_j^*, t_k^*) ist durch den Differenzenstern gegeben:



Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens (9.13) ist die sogenannte *Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung* (CFL):

$$\text{numerisches Abhängigkeitsgebiet} \stackrel{!}{\supset} \text{analytisches Abhängigkeitsgebiet}$$

Bemerkungen:

- Ist die CFL-Bedingung nicht erfüllt, könnte man die Anfangsdaten im analytischen Abhängigkeitsgebiet ausserhalb des numerischen Abhängigkeitsgebietes abändern und damit die Lösung ändern, ohne dass sich die numerische Approximation ändert. Das würde bedeuten, dass die Approximation nicht gegen die exakte Lösung streben kann für $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$.
- Für unser Problem ist die CFL-Bedingung auch hinreichend für die Konvergenz.

Die CFL-Bedingung ist in unserem Modellproblem erfüllt, falls

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq | \text{Steigung der Charakteristiken} | = \frac{1}{c}$$

bzw.

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda \leq 1.$$

Beispiel: Angeschlagene Klaviersaite

Wir betrachten die Gleichung (9.9) für $0 \leq x \leq L$ und $t \geq 0$, mit der Randbedingung $u(t, 0) = 0$, $u(t, L) = 0$. Das Diskretisationsverfahren (9.13) führt mit $\Delta x = L/N$ und mit

$$\tilde{\underline{u}}^{k+1} := \left(\tilde{u}_1^{k+1}, \dots, \tilde{u}_{N-1}^{k+1} \right)^T \in \mathbb{R}^{N-1}$$

auf

$$\tilde{\underline{u}}^{k+1} = 2\tilde{\underline{u}}^k - \lambda^2 A \tilde{\underline{u}}^k - \tilde{\underline{u}}^{k-1} = -\tilde{\underline{u}}^{k-1} + (2I - \lambda^2 A) \tilde{\underline{u}}^k, \quad (9.14)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}.$$

Die Anfangsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}}^0 &= (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{N-1}))^T \\ \tilde{\underline{u}}^1 &= \tilde{\underline{u}}^0 + \Delta t \cdot (\psi(x_1), \dots, \psi(x_{N-1}))^T. \end{aligned}$$

Bemerkung: Vergleiche Matrix \hat{A} der Richardson-Methode in Abschn. 9.1. Hier hat die Matrix A einen Faktor $\lambda^2 = \Delta t^2 / \Delta x^2 \leq 1$ (CFL-Bedingung) und nicht wie bei der Richardson-Methode einen grossen Faktor $\Delta t / \Delta x^2$ ('steifes Problem'). Damit ist hier die Einschränkung an den Zeitschritt Δt viel weniger einschneidend.

In der nachfolgenden Figur ist die Approximation der Lösung von (9.9) für $L = 3$, $c = 1$, mit Anfangsbedingung $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) = \exp(-16(x-1)^2)$ ('instantane' Auslenkung zur Zeit $t = 0$) mit dem Verfahren (9.14) für $N = 25$, $\Delta x = L/N$, $\lambda = 1.004$, $\Delta t = \lambda \Delta x$ für $n = 80$ Zeitschritte dargestellt. Man sieht schön, wie sich die Anfangsauslenkung fortpflanzt und an den Rändern reflektiert wird. Nach ungefähr 70 Zeitschritten machen sich Instabilitäten bemerkbar, was darauf zurückzuführen ist, dass die CFL-Bedingung 'schwach' verletzt ist.

