Numerische Mathematik, Prof. K. Nipp SS06

Musterlösung, Serie 1

① Von Skript S. 6

$$\left|\frac{x-\rho(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{2} B^{1-l} =: eps$$

Es gilt, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<eps$ ist $\rho(1+\alpha)=1$

→ siehe MATLAB, (s1.m)

---

② $100 = 1e2$ $\quad 1/6 = 0.16e0 \quad 1/10 = 0.1$

$0.5 = 0.5e0 \quad 1/7 = 0.142857e0 \quad 1/10000 = 1e-5$

$1/3 = 0.33e0 \quad 1/8 = 0.125e0$

$1/4 = 0.25e0 \quad 1/9 = 0.11e0$

$1/5 = 0.2e0$

Also $100 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{10000} = 1e2 - 0.5e0 + 0.33e0 - 0.25e0 + 0.2e0 - \ldots - 1e-5$

Hier ist die Summe weniger genau, weil die Exponent kleiner wird und Information ist gelöscht.

$-\frac{1}{10000} + \frac{1}{9999} - \frac{1}{9998} + \ldots + 100 = 1e-5 + 1.0001001e-4 - 1.00020004e-4 + \ldots + 100$

Hier ist die Summe genauer, weil die Exponent langsam grosser wird.

---

③ $a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

a) $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$, $\quad a = \sqrt[3]{29790}$, $b = 31$

b) $\ln(10001) - \ln(10000) = \ln(10001/10000)$

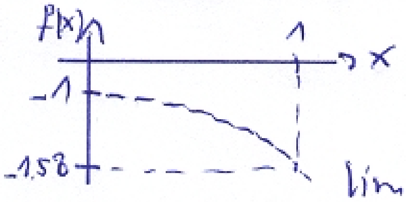
c) $x = \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)$ mit $\cos(b) = \cos(0) = 1$

---

④ a) Wir wissen, dass [Skript Seite 9] : $\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| \cdot K \geq \left|\frac{y(x)-y(\tilde{x})}{y(x)}\right|$

mit Kondition Zahl K

$K = \left|\frac{x y'(x)}{y(x)}\right| = \left|\frac{-xe^x}{1-e^x}\right| = \left|\frac{xe^x}{1-e^x}\right|$; $f(x) = \frac{xe^x}{1-e^x}$, $f'(x) = \frac{e^x(1+x-e^x)}{(1-e^x)^2}$



Für $x \in (0,1)$ gilt: $e^x > 0$, $e^x > 1+e^x$, $(1-e^x)^2 > 0$

also $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0,1)$

$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1$, $f(1) = -1.58$, $K(x) = |f(x)|$, $\max_{x \in (0,1)} K(x) = 1.58 \simeq 1.6$

$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = $ Relative Fehler $= 0.1\%$ (gegeben)

$\Rightarrow 0.1\% \cdot K = 0.1\% \cdot 1{,}6 = \underline{\underline{0.16\% < 1\%}}$ → Ja, diese Genauigkeit genügt!

b) MATLAB