

Musterlösung Serie 10

1) $\tilde{y}_{j+1}^{k+1} = \tilde{y}_j + \frac{h}{2} (f(\tilde{y}_j) + f(\tilde{y}_{j+1}^k))$ ist die Fixpunktiteration
mit $|f| < M_1, |f'| < M_2$

wir schreiben $\phi(y) = y_j + \frac{h}{2} (f(y_j) + f(y))$ mit $\left\{ \begin{array}{l} y = \tilde{y}_{j+1}^k \\ \phi(y) = \tilde{y}_{j+1}^{k+1} \\ y_j = \tilde{y}_j \end{array} \right.$

z.z. $\phi(y) = y_j + \frac{h}{2} (f(y_j) + f(y))$ selbstabb.

und kontrahierend nach BFPJ

a) Selbstabb. auf $I = [y_j - r, y_j + r]$ (r noch zu bestimmen)

auf I gilt $|\phi(y) - y_j| \leq \frac{h}{2} \cdot 2 \max |f| \leq h M_1 \leq r$

Also für selbstabb. $r = h \cdot M_1$ und $I = [y_j - h M_1, y_j + h M_1]$

b) Kontraktion: $|\phi(y) - \phi(x)| = \frac{h}{2} |f(y) - f(x)|$

$$\leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [x, y]} |f'(\xi)| |y - x| \leq \frac{h}{2} \cdot M_2 |y - x|$$

für $h < \frac{2}{M_2}$ ist $|\phi(y) - \phi(x)| < 1 \cdot |y - x| \quad \#$

$$2) \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$a) \gamma_1 := x, \quad \gamma_2 := \dot{x}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2$$

$$\dot{\gamma}_2 = \ddot{x} = -\frac{1}{2} \dot{x} - x = -\frac{1}{2} \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\text{Also } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } \dot{\gamma} = A \cdot \gamma$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) Trapez: $y^{k+1} = y^k + \frac{h}{2} (A y^k + A y^{k+1})$, sei $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(I - \frac{h}{2} A) y^{k+1} = (I + \frac{h}{2} A) y^k \Leftrightarrow y^{k+1} = (I - \frac{h}{2} A)^{-1} (I + \frac{h}{2} A) y^k$$

$$y^1 = (I - \frac{h}{2} A)^{-1} (I + \frac{h}{2} A) y^0, \quad y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{2}$$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/4 & 9/8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ -1/4 & 7/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8947 \\ -0.4211 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(0.5) \approx \underline{\underline{0.8947}} \quad \left(= \frac{17}{19} \right), \quad \dot{x}(0.5) \approx \underline{\underline{-0.4211}}$$

3) a) $\dot{x} = A \cdot x$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

• Eigenwert: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ -1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-5-\lambda) + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \lambda_2 = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}}$$

• Eigenvektor: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -4x_2$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -4, \Rightarrow \underline{v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_2 = -2: \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -3x_2$$

$$x_2 = 1, x_1 = -3 \Rightarrow \underline{v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$A = T D T^{-1}$ in Gleichung einsetzen:

$$\dot{\underline{x}} = T D T^{-1} \underline{x}, \quad \text{variable \u00c4nderung: } \underline{x} = T^{-1} x \Rightarrow \boxed{x = T \cdot \underline{x}}$$

$$T \dot{\underline{x}} = T D \underline{x} \Rightarrow \boxed{\dot{\underline{x}} = D \underline{x}} \text{ zu l\u00f6sen} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ zur\u00fcck zu y -variable:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ e^{-t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{-t} \\ x_2 = e^{-2t} \end{cases}$$

exakte L\u00f6sung

$$b) \quad y\left(t=\frac{1}{10}\right) = \begin{pmatrix} -6,07554 \\ 1,72357 \end{pmatrix} = y_1$$

$$y\left(t=\frac{2}{10}\right) = \begin{pmatrix} -5,28588 \\ 1,48905 \end{pmatrix} = y_2$$

→ Rechnen $y\left(t=\frac{3}{10}\right) \equiv y_3$ mit Adams-Bashforth:

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12} \left[23 \cdot \underbrace{f(t_2, y_2)}_{A \cdot y_2} - 16 \cdot \underbrace{f(t_1, y_1)}_{A \cdot y_1} + 5 \cdot \underbrace{f(t_0, y_0)}_{A \cdot y_0} \right], \quad h = \frac{1}{10}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} -5,28588 \\ 1,48905 \end{pmatrix} + \frac{1}{120} \left[23 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5,28588 \\ 1,48905 \end{pmatrix} - 16 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6,07554 \\ 1,72357 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_3 = \begin{pmatrix} -4,60822 \\ 1,28914 \end{pmatrix} \equiv y\left(t_3 = \frac{3}{10}\right)}}$$

Vergleich mit exaktem Resultat: $t = \frac{3}{10}$ in a) einsetzen:

$$y_3 = \begin{pmatrix} -4,60976 \\ 1,28963 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \text{Abs. Fehler} = |y_{\text{exakt}} - y_{\text{berechnet}}| = \begin{pmatrix} 0,0015 \\ 0,0005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta y \approx O(h)^4 = \left(\frac{3}{10}\right)^4 = 0,008$$

1 Schritt → Lokale Fehler