Numerische Mathematik, Prof. K. Nipp
Musterlösung, Serie 12

1) $A = \begin{pmatrix} -1001 & 999 \\ 999 & -1001 \end{pmatrix}$, $\dot{x} = Ax$, $A = TDT^{-1}$

a)
E.W. $\lambda_1 = -2000$, $\lambda_2 = -2$
E.V. $t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2000 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot t_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot t_2 = \begin{pmatrix} -c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

b) $x(0) = c_1 t_1 + c_2 t_2 = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$

i) $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0 \Rightarrow x(t) = e^{-2000 \cdot t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|1 + \lambda_1 \cdot h| < 1$ oder $1 - 2000 \cdot h > -1 \Rightarrow h < \frac{1}{1000}$

ii) $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1 \Rightarrow x(t) = e^{-2 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|1 + \lambda_2 \cdot h| < 1$ oder $1 - 2h > -1 \Rightarrow h < 1$

iii) $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1 \Rightarrow x(t) = e^{-2000 \cdot t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ beide E.W. $\Rightarrow h < \frac{1}{1000}$ (kleinste h)

2) $\rightarrow$ Matlab

3) $\rightarrow$ Matlab