

Musterlösung, Serie 3

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) $A = D + L + R$ mit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

für Jacobi: $T = -D^{-1}(L+R) = -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{eig}(T) \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{8} = 0, \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \approx \pm 0.3535, \max |\lambda_i|_{i=1,2} = \frac{1}{\sqrt{8}} < 1$

$\Rightarrow$ für dieses System konvergiert das Jacobi-Verfahren

b) Jacobi-Verfahren: $Dx^{k+1} = -(L+R)x^k + b, x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T$ Startvektor gegeben

$\Rightarrow x^1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}}_{-D^{-1}(L+R)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x^0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_b = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}}}$

Absolute Fehler: $\|e^k\|_2 \leq \|T\|_2^k \underbrace{\|e^0\|_2}_{\text{Anfangsfehler}} \Rightarrow$ gilt auch für rel. Fehler: $\frac{\|e^k\|_2}{\|x\|} \leq \frac{\|T\|_2^k \|e^0\|}{\|x\|}$
 $\hookrightarrow$ zu bestimmen

$\underbrace{\|T\|_2^k}_{e^{k \cdot \ln(\|T\|_2)}} \geq \frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2} \Rightarrow k \geq \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(\|T\|_2)}$

und $\|T\|_2 := \sqrt{\max(\text{eig}(T^T T))}$: definition

$T^T T = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \text{eig}(T^T T) \Rightarrow \left(\frac{1}{16} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) = 0$

$\Rightarrow \|T\|_2 = \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$

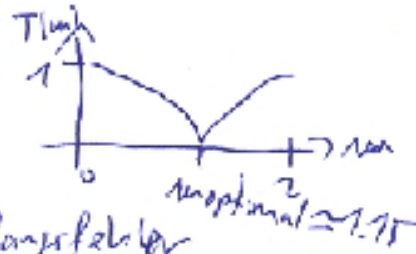
$\Rightarrow \lambda_1 = 1/16, \lambda_2 = 1/4$
 $\max = \lambda_2$

$\Rightarrow k \geq \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(1/2)} \approx 19.93 \rightarrow \underline{\underline{k=20 \text{ Iterations}}}$

$$\textcircled{2} \quad A = D + L + R$$

$$\text{SOR: } T = (D + \omega L)^{-1} [-\omega R + (1 - \omega) D]$$

$$\text{SOR-Verfahren: } x^{k+1} = \underbrace{(D + \omega L)^{-1} [-\omega R + (1 - \omega) D]}_{T(\omega)} x^k + (D + \omega L)^{-1} \omega b$$

a) Siehe Matlab: plot $T(\omega)$ for $0 < \omega < 2$ } $\rightarrow$ 
 $\rightarrow \omega_{\text{optimal}} \approx \underline{\underline{1.15}}$
 Anfangsfehler

b) Absolut Anfangsfehler: $\|e^k\|_2 \leq \|T^k\|_2 \|e^0\|_2$

$$\Rightarrow \|T^k\|_2 \geq \frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2} \Leftrightarrow e^{k \cdot \ln(\|T\|_2)} \geq \frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2}$$

$$\Rightarrow k \cdot \ln(\|T\|_2) \geq \ln(10^{-10})$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(10^{-10})}{\ln(\|T\|_2)}$$

$$\Rightarrow \text{Zu rechnen: } \|T\|_2 := \sqrt{\max(\text{eig}(T^T T))}$$

• Mit $\omega = 0.4 \rightarrow 226$ Iterations (siehe Matlab)

• Mit $\omega = 1.4 \rightarrow$ keine Aussage! da $\|T\|_2 > 1$!

$$(3) \quad F(u) = \frac{1}{2} u^T A u + u^T b, \quad A = A^T \text{ symmetrisch}$$

$$\begin{aligned} \nabla F(u) &= \frac{1}{2} (\underbrace{u^T A + A u}_{= A^T u = A u}) + b = \underline{\underline{A u + b}} \quad \# \end{aligned}$$

• Man kann auch elementweise rechnen, ex. für $A = 3 \times 3$ Matrix:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2} (u_1 \ u_2 \ u_3) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \underbrace{(u_1 \ u_2 \ u_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{= u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 \\ a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3 \\ a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$F(u) = \frac{1}{2} (a_{11} u_1^2 + a_{12} u_1 u_2 + a_{13} u_1 u_3 + a_{12} u_1 u_2 + a_{22} u_2^2 + a_{23} u_2 u_3 + a_{13} u_1 u_3 + a_{23} u_2 u_3 + a_{33} u_3^2) + u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3$$

$$\begin{aligned} \nabla F(u) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} F(u) \\ \frac{\partial}{\partial u_2} F(u) \\ \frac{\partial}{\partial u_3} F(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 u_1 a_{11} + u_2 a_{12} + u_3 a_{13} + u_2 a_{12} + u_3 a_{13} \\ u_1 a_{12} + u_1 a_{12} + 2 u_2 a_{22} + u_3 a_{23} + u_3 a_{23} \\ u_1 a_{13} + u_2 a_{23} + u_1 a_{13} + u_2 a_{23} + 2 u_3 a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{A u + b}} \quad \# \end{aligned}$$