Numerische Mathematik, Prof. K. Nipp — SS 06

Musterlösung, Serie 3

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) $A = D + L + R$ mit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

für Jacobi: $T = -D^{-1}(L+R) = -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{eig}(T) \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{8} = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} \simeq \pm 0.3535$, $\max|\lambda_i|_{i=1,2} = \frac{1}{\sqrt{8}} < 1$

$\Rightarrow$ für dieses System konvergiert das Jacobi-Verfahren

b) Jacobi-Verfahren: $Dx^{k+1} = -(L+R)x^k + b$, $x^0 = (1\ 1)^T$: Startvektor gegeben

$\Rightarrow x^1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}}_{-D^{-1}(L+R)}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x^0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}_{D^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Absolute Fehler: $\|e^k\|_2 \le \underbrace{\|T\|_2^k}_{\text{zu abstimmen}} \|e^0\|_2$ (Anfangsfehler) $\Rightarrow$ gilt auch für rel. Fehler: $\frac{\|e^k\|_2}{|x|} \le \frac{\|T\|_2^k \|e^0\|}{|x|}$

$\underbrace{\|T\|_2^k}_{e^{k\cdot\ln(\|T\|_2)}} \ge \underbrace{\frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2}}_{10^{-6}} \Rightarrow k \ge \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(\|T\|_2\|)}$

und $\|T\|_2 := \sqrt{\max|\text{eig}(T^T T)|}$: definition

$T^T T = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $\text{eig}(T^T T) \Rightarrow (\frac{1}{16}-\lambda)(\frac{1}{4}-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1/16$, $\underbrace{\lambda_2 = 1/4}_{\max = \lambda_2}$

$\Rightarrow \|T\|_2 = \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$

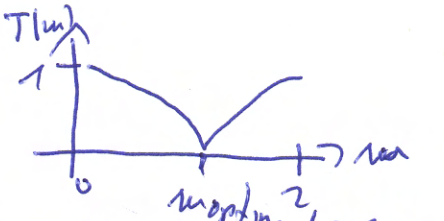
$\Rightarrow k \ge \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 19.93 \Rightarrow \underline{k = 20 \text{ Iterations}}$

② $A = D + L + R$

SOR: $T = (D + \omega L)^{-1}\left[-\omega R + (1-\omega) D\right]$

SOR-Verfahren: $x^{k+1} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}\left[-\omega R + (1-\omega) D\right]}_{T(\omega)} x^k + (D+\omega L)^{-1} \cdot \omega b$

a) Siehe Matlab: plot $T(\omega)$ for $0 < \omega < 2$ $\rightarrow$



$\Rightarrow \omega_{optimal} \simeq 1.15$

b) Absolut Anfangsfehler: $\|e^k\|_2 \leq \|T^k\|_2 \|e^0\|_2$ (Anfangsfehler)

$\Rightarrow \|T^k\|_2 \geq \frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{k \cdot \ln(\|T\|_2)} \geq \frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2}$ ($\frac{\|e^k\|_2}{\|e^0\|_2} \approx 10^{-10}$)

$\Rightarrow k \cdot \ln(\|T\|_2) \geq \ln(10^{-10})$

$\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(10^{-10})}{\ln(\|T\|_2)}$

$\Rightarrow$ Zu rechnen: $\|T\|_2 := \sqrt{\max(\mathrm{eig}(T^T T))}$

- Mit $\omega = 0.4 \rightarrow$ 226 Iterations (siehe Matlab)
- Mit $\omega = 1.4 \rightarrow$ Keine Aussage! da $\|T\|_2 > 1$!
  Kriterium gibt hier keine Aussage, aber spektral radius < 1
  $\rightarrow$ Konvergenz!

(3) $F(u) = \frac{1}{2} u^T A u + u^T b$, $A = A^T$ symmetrisch

$$DF(u) = \frac{1}{2}(\underbrace{u^T A}_{=A^T u = Au} + Au) + b = Au + b$$ #

- Man kann auch elementweisse rechnen, ex. für $A = 3\times 3$ Matrix:

$$F(u) = \frac{1}{2}(u_1 u_2 u_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \underbrace{(u_1 u_2 u_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{= u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_2 b_3}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ a_{12}u_2 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ a_{13}u_3 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \end{pmatrix}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\left(a_{11}u_1^2 + a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_1u_3 + a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + a_{23}u_2u_3 + a_{13}u_3 + a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2\right) + u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3$$

$$DF(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1}(F(u)) \\ \partial_{u_2}(F(u)) \\ \partial_{u_3}(F(u)) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2u_1a_{11} + u_2a_{12} + u_3a_{13} + u_2a_{12} + u_3a_{13} \\ u_1a_{12} + u_1a_{12} + 2u_2a_{22} + u_3a_{23} + u_3a_{23} \\ u_1a_{12} + u_2a_{23} + u_1a_{13} + u_2a_{23} + 2u_3a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= Au + b$$ #