Serie 8

1. **a)** Berechnen Sie *von Hand* eine Approximation des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0.526978557614\ldots,$$

indem Sie drei Schritte der Trapezmethode durchführen.

b) Verbessern Sie die Werte aus a) indem Sie 2 Schritte des Rombergschemas durchführen.

2. **a)** Gegeben seien die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$$

und das Integral $I = \int_0^\pi f(x)\,dx = \pi/\sqrt{2}$. Bestimmen Sie eine Approximation von I mit der 5-Punkt-Gaussformel. Diese Formel besitzt die folgenden Knoten und Gewichte (auf 8 Stellen gerundet):

$\pm x_i$:	0	0.53846931	0.90617985
w_i :	0.56888889	0.47862867	0.23692689

b) Unterteilen Sie das Intervall $[0, \pi]$ in drei gleich grosse Teilintervalle, und wenden Sie die 5-Punkt-Gaussformel auf jedes Teilintervall an.

c) Vergleichen Sie Ihre Resultate in a) und b) mit der exakten Lösung.

3. **(PA)** Adaptives Quadraturverfahren

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm für eine adaptive Quadraturmethode (basierend auf der Trapezmethode) zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \neq 0.$$

Implementieren Sie folgenden Algorithmus: Gegeben seien die Intervallgrenzen a, b, die relative Toleranz TOL und eine Schätzung des Wertes des Integrals I_s.

bitte wenden!

Bitte wenden!

```
h  = b-a % Schrittweite
I1 = Trapezregel angewandt auf [a,b]
I2 = Simpsonregel angewandt auf [a,b]
if I1+Is*TOL/eps == I2+Is*TOL/eps
  I = I2 % Teilintegral genau genug berechnet
else     % Verfeinerungsschritt
  wende die Routine rekursiv auf 2 Teilintervalle an
end
```

b) Testen Sie Ihr Programm für das Integral

$$\int_0^1 \left(e^{-50(x-0.5)^2} + e^{-2x}\right) dx = 0.68299504214\ldots$$

mit Schätzung $I_s = 0.5$ und den Toleranzen $TOL = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$.

c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Resultaten der MATLAB-Funktion `quad`.

Abgabe: Mittwoch 7. Juni in der Übungsstunde.
http://www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2005/other/num_math_mavt

Serie 8

1\. a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx$

$S_0 := \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 0}{1+0^2} + \frac{\sin \pi/2}{1+(\pi/2)^2} \right)$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\pi^2/4} \approx 0{,}1442$

$T_0 := h_0 S_0 = \frac{\pi}{2} S_0 \approx 0{,}2265$

$S_1 = S_0 + f(a+h_1) = 0{,}1442 + f(0+\pi/4)$

$= 0{,}1442 + \frac{\sin(\pi/4)}{1+\pi^2/16}$

$\approx 0{,}5815$

$T_1 = h_1 S_1 = \frac{\pi}{4} S_1 \approx 0{,}4567$

$S_2 = S_1 + f(a+h_2) + f(a+3h_2)$

$= 0{,}5815 + f(0+\pi/8) + f(0+3\pi/8)$

$= 0{,}5815 + \frac{\sin(\pi/8)}{1+\pi^2/64} + \frac{\sin(3\pi/8)}{1+9\pi^2/64}$

$\approx 1{,}300$

$T_2 = h_2 S_2 = \frac{\pi}{8} S_2 \approx 0{,}5105$

b)

$R_{0,0} = 0{,}2265$

$R_{1,0} = 0{,}4567$

$R_{2,0} = 0{,}5105$

$$R_{1,1} = \frac{R_{1,0} - 4^{-1} R_{0,0}}{1 - 4^{-1}} = 0{,}5334$$

$$R_{2,1} = \frac{R_{2,0} - 4^{-1} R_{1,0}}{1 - 4^{-1}} = 0{,}5284$$

$$\dots \quad R_{2,2} = \frac{R_{2,1} - 4^{-1} R_{1,1}}{1 - 4^{-1}} = 0{,}5268$$

$\Rightarrow I \approx 0{,}5268$ ([redacted])

2. $$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Gauss Quadratur : $\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$

Integrale auf $[a,b]$:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) d\xi$$

$$\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(\xi+1)\right)}\,d\xi$$

$$\approx \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{5} w_i \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(\xi_i+1)\right)} \longrightarrow \text{Matlab}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx}_{=: I_2} + \underbrace{\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx}_{=: I_3}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}(\xi+1)\right)}\,d\xi \approx \frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{5} w_i \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}(\xi_i+1)\right)}$$

$$I_2 = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\xi + \frac{\pi}{2}\right)}\,d\xi \approx \frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{5} w_i \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\xi_i + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$I_3 = \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\xi + 5\pi/6\right)}\,d\xi \approx \frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{5} w_i \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\xi_i + \frac{5\pi}{6}\right)}$$

$\longrightarrow$ Matlab

3. $\longrightarrow$ Matlab