D–HEST / Lehrdiplom Mathematik

Prüfung Mathematik III

401-0293-00S

Nachname **XX** *Vorname* **XX** *Legi-Nr.* **XX-000-000** *Prüfungs-Nr.* ***000***

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei $y' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System.

Für welches $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,2} = -\frac{1}{2}$

(B) $y_{\infty,2} = 0$

(C) $y_{\infty,2} = 1$

(D) $y_{\infty,2} = \frac{1}{2}$

1.MC2 [1 Punkt] Sei $V = M_{4\times 4}$ der Vektorraum der 4×4 - Matrizen mit reellen Einträgen.

Welche Dimension hat der Unterraum $U = \left\{ A \in V \mid A^\top = -A \right\}$? Dabei bezeichnet $A^\top$ die transponierte Matrix.

(A) $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$

(B) $\dim_{\mathbb{R}} U = 6$

(C) $\dim_{\mathbb{R}} U = 8$

(D) $\dim_{\mathbb{R}} U = 16$

1.MC3 [1 Punkt] Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ist **nicht** diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_3 = -3$. Dann ist der fehlende Eigenwert $\lambda_2 \ldots$

(A) $\lambda_2 = 1$.

(B) $\lambda_2 = -1$.

(C) $\lambda_2 = -2$.

(D) $\lambda_2 = -3$.

1.MC4 [1 Punkt] Welches J kommt als Jordan Normalform von A in **1.MC3 oben** infrage?

(A) $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(B) $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(C) $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(D) $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1.A1 [2 Punkte] Die Matrix A aus **1.MC3 oben** definiert ein lineares DGL-System $y' = Ay$. Dieses modelliert die Entwicklung in drei Kompartimenten K_1, K_2 und K_3. Vervollständigen Sie das zugehörige Kompartiment-System **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

Das heisst: Geben Sie fehlende Pfeile (mit Richtung) und Beschriftungen an.

1.A2 [2 Punkte] Sei $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ aus **1.MC4 oben**.

Wir suchen eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$ des Systems $y' = Jy$ und wissen schon, dass die Funktion $t \mapsto e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Basisvektor ist. Bestimmen Sie zwei fehlende Basisvektoren.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

1.A3 [6 Punkte] Sei nun $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ aus **1.MC4 oben**.

Seien $v_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2(t) = \begin{pmatrix} X \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten X, Y und Z, sodass $t \mapsto v_1(t), t \mapsto v_2(t)$ und $t \mapsto v_3(t)$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$ des Systems $y' = Jy$ ergeben.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A3.**

Aufgabe 2

2.MC1 [**1 Punkt**] Sei f die Funktion mit $f(x) = d \cdot x^2 + 2$, einer Konstanten d und $x \in [-1, 1[$. Für welches d hat die 2-periodische Fortsetzung den Fourier-Koeffizienten $a_0 = \frac{8}{3}$?

(A) $d = -2$
(B) $d = -1$
(C) $d = 1$
(D) $d = 2$

2.MC2 [**1 Punkt**] Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe einer Funktion f, für die

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} \text{ und } b_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}, \qquad k \geq 1$$

bekannt sind.
Sei $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe der Ableitungsfunktion f'. Bestimmen Sie den **zweiten** Fourier-Koeffizienten A_2 dieser Fourier-Reihe.

(A) $A_2 = 0$
(B) $A_2 = 1$
(C) $A_2 = 2$
(D) $A_2 = 4$

2.A1 [**4 Punkte**] Sei f die Funktion mit $f(x) = 1 - x^2$ und $0 \leq x < 1$.

(i) Skizzieren Sie den Graphen der **geraden** Fortsetzung f_g für $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

(ii) Berechnen Sie die **ersten** reellen Fourier-Koeffizienten a_1 und b_1 dieser Funktion f_g.

Hinweis: $\int x^2 \cos(\pi x)\, dx = \frac{2x\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{(\pi^2 x^2 - 2)\sin(\pi x)}{\pi^3} + C.$
Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

2.A2 [**5 Punkte**] Gegeben sei $(\mathcal{P}_{\leq 2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

(i) Bestimmen Sie die Konstante d, sodass die Vektoren

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2 - d\}$$

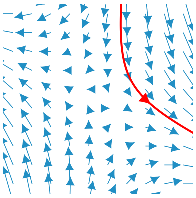
eine **orthogonale** Basis $\mathcal{B}$ bilden.
Hinweis: Beachten Sie die Symmetrieeigenschaften der Funktionen p_1, p_2 und p_3.

(ii) Für den Vektor $q(x) = x^2 \in \mathcal{P}_{\leq 2}$ sei $[q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bezüglich der **Basis $\mathcal{B}$ in Teilaufgabe (i)**. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge X und Y.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A2.**

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & d \end{pmatrix}$. Für welches d sieht die Lösungkurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



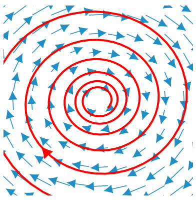
(A) $d = -1$

(B) $d = 0$

(C) $d = \frac{1}{2}$

(D) $d = 1$

3.MC2 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$. Für welches β sieht die Lösungkurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



(A) $\beta = 0$

(B) $\beta = -1$

(C) $\beta = -2$

(D) $\beta = -4$

3.MC3 [1 Punkt] In einem Räuber-Beute-Modell beschreibe x die Räuberpopulation und y die Beutepopulation:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{3} \cdot x(t) + \frac{1}{90} \cdot x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{5} \cdot y(t) \left(10 - \frac{1}{4} \cdot y(t)\right) - \frac{1}{10} \cdot x(t) \cdot y(t) \end{aligned}$$

Der Räuberbestand zu Beginn sei $x(0) = 5$. Für welche Beute $y(0)$ bleibt y konstant?

(A) $y(0) = 10$

(B) $y(0) = 20$

(C) $y(0) = 30$

(D) $y(0) = 40$

3.MC4 [1 Punkt] Seien $x(0) = 0$ und $y(0) = 80$ im Modell **von 3.MC3**. Was passiert?

(A) Die Beute wächst unbegrenzt.

(B) Die Beute stirbt aus.

(C) Die Beute wächst bis an eine Grenze $y_\infty > 0$.

(D) Die Beute reduziert sich bis an eine Grenze $y_\infty > 0$.

3.A1 [2 Punkte] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ und } F(y) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 - y_1^2 \\ \cos(y_1) - \sin(y_2) \end{pmatrix}.$$

Im Quadrat $\{(x, y) | -\pi \le x \le \pi, \ -\pi \le y \le \pi\}$ hat das System drei Fixpunkte.

Zeichnen Sie **zwei von diesen** in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

3.A2 [4 Punkte] Gegeben sei folgendes Modell $\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = F(S, I)$ mit $c, w > 0$ konstant und:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -cS(t)I(t) + wI(t), \\ I'(t) &= cS(t)I(t) - wI(t). \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie die Fixpunkte (S_∞, I_∞) mit $I_\infty > 0$.

(ii) Berechnen Sie jeweils die Jacobi-Matrix $DF(S_\infty, I_\infty)$. Können Sie eine Aussage über das Verhalten einer Lösung machen, welche nahe bei einem (S_∞, I_∞) startet?

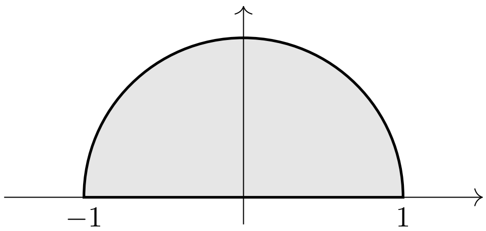
Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2.**

Aufgabe 4

Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \tag{PDE}$$

in Polarkoordinaten auf dem Halbkreis mit Radius 1:



Es gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(1,\varphi) &= 1 \quad \text{für } 0 < \varphi < \pi && \text{(oberer Rand)} \\ u(r,0) = u(r,\pi) &= 0 \quad \text{für } 0 \leq r < 1 && \text{(unterer Rand)} \end{aligned}$$

4.A1 [3 Punkte] Machen Sie den Separationsansatz $u(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen f und g.

Hinweis. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

4.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung für die Funktion g. Beachten Sie dabei, dass wegen der Randbedingung am unteren Rand $g(0) = g(\pi) = 0$ gilt.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A2.**

4.A3 [4 Punkte] Bestimmen Sie zu jedem g die passende Lösung der Differentialgleichung für f, so dass $u(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ eine Lösung von (PDE) ist, welche der Randbedingung am unteren Rand genügt. Schreiben Sie die so gefundenen Basislösungen $u(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ explizit hin.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A3.**

4.A4 [5 Punkte] Finden Sie durch Superposition diejenige Lösung von (PDE) welche zusätzlich der Randbedingung am oberen Rand genügt.

Hinweis. Setzen Sie die Randfunktion am oberen Rand als ungerade Funktion mit Periode 2π fort.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A4.**