**Prof. Dr. E. W Farkas** **ETH Zürich, August 2014**

D-HEST, Lehrdiplom D-MATH

# Lösungen zur Prüfung Mathematik III

---

**1. a)**

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -b & 0 & d \\ b & -(c+e) & 0 \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**b)** Charakteristische Gleichung:

$$\det(B - \lambda I) = \lambda(-1+\lambda) + \frac{1}{4} = (\lambda - \frac{1}{2})^2 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

**c)** Wir überprüfen, dass $T$ die zugehörige Jordan-Matrix ergibt:

$$J = T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also folgt, dass

$$\mathrm{e}^{Bt} = T\mathrm{e}^{Jt}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 2-t & t \\ -t & 2+t \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für die gesuchte Lösung

$$x(t) = \mathrm{e}^{Bt} \cdot x(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 2-t & t \\ -t & 2+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**d)** Die Funktion $z(t)$ bleibt konstant, falls $z'(0) = 0$, d.h. $\alpha z(0)(K - z(0)) = 0$. Also für $z(0) = 0$ oder $z(0) = K$.

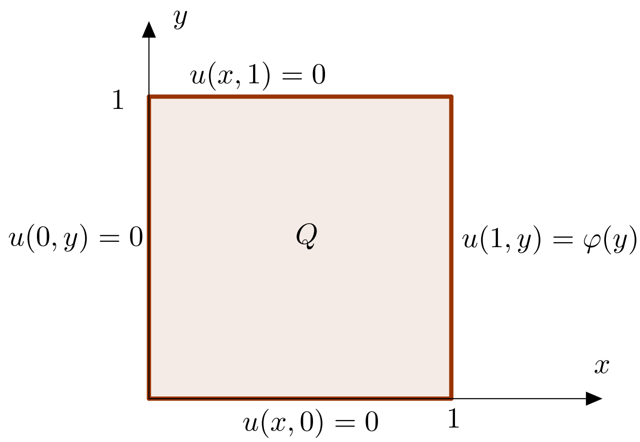
**e)** Separation der Variablen und anschliessende Partialbruchzerlegung ergeben

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}z}{z(K-z)} &= \int \alpha \mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{Kz} + \frac{1}{K(K-z)} \mathrm{d}z &= \alpha t + C \\
\frac{1}{K}\left(\log(z) - \log(K-z)\right) &= \alpha t + C \\
\log\left(\frac{z}{K-z}\right) &= K\alpha t + C' \\
\frac{z}{K-z} &= A\mathrm{e}^{K\alpha t} \\
z(t) &= \frac{KA\mathrm{e}^{K\alpha t}}{1 + A\mathrm{e}^{K\alpha t}} = \frac{K}{1 + \mathrm{e}^{-K\alpha t}/A}
\end{aligned}$$

Durch den Anfangswert bestimmen wir $A$:

$$\frac{K}{1 + 1/A} = z_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{z_0}{K - z_0} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - z_0}{z_0}\mathrm{e}^{-K\alpha t}}.$$

**2.** **a)** Wir haben folgende Situation:




In $Q$ gilt $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Der Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ liefert $X''Y + XY'' = 0$, und damit

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y}.$$

Da die linke Seite nur von $x$ abhängt und die rechte nur von $y$, kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten $K \in \mathbb{R}$ sind. Die Randbedingungen erfordern eine (1-)periodische Lösung für $Y$. Für $K \geq 0$ besitzt die Differentialgleichung $Y'' = KY$ nur die (triviale) periodische Lösung $Y \equiv 0$. Demnach wäre $u \equiv 0$, aber dies ist nicht die gesuchte Lösung, da die Randbedingung entlang der rechten Kante von $Q$ nicht trivial ist. Wir nehmen also an, dass $K < 0$ ist, und setzen $K = -\omega^2$ für gewisses $\omega > 0$. Wir erhalten insgesamt $-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2$ und damit

$$\begin{cases} X'' - \omega^2 X = 0 & \text{(DE1)} \\ Y'' + \omega^2 Y = 0 & \text{(DE2)} \end{cases}.$$

**b)** Wir beginnen mit $Y$. Gleichung (DE2) hat die allgemeine Lösung $Y(y) = C\cos(\omega y) + D\sin(\omega y)$. Aus $Y(0) = 0$ folgt $C = 0$, und aus $Y(1) = 0$ folgt $\sin(\omega) = 0$. Somit erhalten wir $\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (wobei zu beachten ist, dass wir *keine* negativen Werte von $n$ zugelassen haben, so dass die Lösungen linear unabhängig sind, und der Fall $n = 0$ liefert nur die triviale Lösung $Y \equiv 0$). Also erhalten wir

$$Y_n(y) = D_n \sin(n\pi y), \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ D_n \in \mathbb{R}.$$

Analog ergibt (DE1), dass $X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$. Aus $X(0) = 0$ folgt, dass $A = -B$ ist. Aus dem Vorangehenden wissen wir, dass $\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also erhalten wir die Lösungen

$$X_n(x) = A_n(e^{n\pi x} - e^{-n\pi x}),\ n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathbb{R}.$$

**c)** Die Funktion $\varphi$ ist periodisch mit Periode 1. Wir machen den üblichen Ansatz für die Fourier-Reihe:

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n y) + b_n \sin(2\pi n y).$$

Wir bemerken, dass $\varphi$ eine ungerade Funktion ist. Demnach gilt $a_n = 0$, für alle $n \geq 0$. Für $b_n$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & 2\int_0^1 \varphi(y)\sin(2\pi n y)dy \\ & = & 4\int_0^{1/2} y(1-2y)\sin(2\pi n y)dy \\ & = & \begin{cases} 0 & n \text{ gerade;} \\ \frac{4}{\pi^3 n^3} & n \text{ ungerade .} \end{cases} \end{array}$$

Die Fourier-Reihe von $\varphi$ lautet also

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^3(2n+1)^3} \sin(2\pi(2n+1)y)$$

**d)** Wir haben die Basislösungen $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$ gefunden. Durch Superposition erhalten wir

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(\pi n y)(\mathrm{e}^{\pi n x} - \mathrm{e}^{-\pi n x}), \tag{1}$$

wobei wir $E_n = A_n D_n$ gesetzt haben. Um die Koeffizienten $E_n$ zu bestimmen, setzen wir $x = 1$ und erhalten aus der Randbedingung, dass

$$u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(1)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(\pi n y)(\mathrm{e}^{\pi n} - \mathrm{e}^{-\pi n}) = \varphi(y)$$

gelten muss. Aus der Lösung von **c)** sieht man also, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mathrm{e}^{n\pi} - \mathrm{e}^{-n\pi})\sin(\pi n y) = \sum_{l=1, l \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{4}{\pi^3 l^3} \sin(2\pi l y)$$

gelten muss. Koeffizientenvergleich ergibt $E_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausser wenn $n = 4k+2$, wobei $k = 0, 1, \cdots$, und für $n = 4k+2$ gilt,

$$E_n = \frac{4}{\pi^3(2k+1)^3(\mathrm{e}^{(4k+2)\pi} - \mathrm{e}^{-(4k+2)\pi})}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^3(2k+1)^3} \frac{\mathrm{e}^{(4k+2)\pi x} - \mathrm{e}^{-(4k+2)\pi x}}{\mathrm{e}^{(4k+2)\pi} - \mathrm{e}^{-(4k+2)\pi}} \sin(\pi(4k+2)y).$$

**3.** **a)** i) Es gilt

$$\mathcal{L}\{\cosh\}(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-(s-1)t} + e^{-(s+1)t})dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\Big] = \frac{s}{s^2-1}.$$

ii) Mithilfe des Ähnlichkeitssatzes und des Verschiebungssatzes nach rechts ergibt sich für die gesuchte Laplace-Transformierte

$$2\frac{s}{s^2-4} + 2^2 e^{-2s}\frac{2}{s^3}.$$

**b)** Da $a \neq b$ ist, machen wir für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$\frac{1}{s(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-a} + \frac{C}{s-b},$$

mit zu bestimmenden Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Wir erhalten die Bedingung

$$1 = A(s-a)(s-b) + Bs(s-b) + Cs(s-a).$$

Einsetzen von $s = 0$ ergibt $A = 1/ab$, mit $s = a$ erhalten wir $B = 1/a(a-b)$ und mit $s = b$, dass $C = 1/b(b-a)$. Weil bekanntlich

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

gilt, erhalten wir also

$$h(t) = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}e^{at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{bt}.$$

**c)** i) Wir wenden die Laplace-Transformation auf die gegebene lineare Differentialgleichung an und erhalten mit dem Ableitungssatz

$$\tau(sU(s) - u(0)) + U(s) = V(s),$$

und erhalten demnach wegen $u(0) = 0$, dass

$$U(s) = \frac{V(s)}{\tau s + 1}$$

gilt.

ii) Da $v(\cdot)$ zeitlich konstant ist, gilt $V(s) = v_0/s$. Demnach ist wegen i)

$$U(s) = \frac{v_0}{s(\tau s + 1)} = v_0\Big[\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\Big].$$

Also ergibt sich für die gesuchte Lösung

$$u(t) = v_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0.$$