D-HEST

Lösungen zur Prüfung Mathematik III, Sommer 2018

Prof. Dr. E. W. Farkas

Bitte wenden!

1. Laplace-Transformation *(10 Punkte)*

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $s \in (\alpha_f, \infty)$, wobei $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

a) Die Funktion g sei gegeben durch $g(t) = 2^t t^2 + \cos(7t - 4)\sigma(7t - 4)$. Berechnen Sie $\mathcal{L}[g](s)$ für $s > \ln(2)$. *(3 Punkte)*

Zuerst verwenden wir die Linearität der Laplace-Transformation, dann Dämpfungs- und Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto t^2 e^{\ln(2)t}](s) + \mathcal{L}[t \mapsto \cos(7(t - \tfrac{4}{7}))\sigma(t - \tfrac{4}{7})](s) \\
&= \underbrace{\mathcal{L}[t \mapsto t^2](s - \ln(2))}_{\textit{(1 Punkt)}} + \underbrace{e^{-\frac{4}{7}s}\mathcal{L}[t \mapsto \cos(7t)]}_{\textit{(1 Punkt)}} \\
&= \frac{2}{(s - \ln(2))^3} + \frac{se^{-\frac{4}{7}s}}{49 + s^2} \qquad \textit{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie allgemein, dass gilt:

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0,$$

falls die Funktion f den oben genannten Bedingungen genügt, *(2 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für eine Funktion $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt: $\left|\int_0^\infty h(t)dt\right| \leq \int_0^\infty |h(t)|dt$, falls das Integral auf der rechten Seite existiert.

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} |\mathcal{L}[f](s)| = \lim_{s\to\infty} \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| &\leq \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \qquad \textit{(1 Punkt)} \\
&\leq \lim_{s\to\infty} C \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt = \lim_{s\to\infty} \frac{C}{\alpha - s} \left[e^{(\alpha-s)t}\right]_0^\infty \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{C}{s - \alpha} = 0 \qquad \textit{(1/2 Punkt)}
\end{aligned}$$

c) Finden Sie eine Funktion F, die *keine* inverse Laplace-Transformierte besitzt, also es *kein* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gibt mit $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$. *(1 Punkte)*

Mögliche Antworten sind z.B. $F(s) = 1$, $F(s) = s$, $F(s) = e^s$ etc., da diese Funktionen für $s \to \infty$ nicht gegen 0 konvergieren. *(1 Punkt)*

Siehe nächstes Blatt!

Betrachten Sie nun die Faltungsintegralgleichung

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t \sin(t-u)y(u)du. \tag{1}$$

d) Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)}$. Finden Sie anschließend $y(t)$ durch Rücktransformation. *(4 Punkte)*

Hinweis: Wenden Sie den Faltungssatz auf das Integral in (1) an.

Zunächst lässt sich (1) schreiben als

$$y(t) = e^{-t} + (\sin * y)(t).$$

Anwenden der Laplace-Transformation und des Faltungssatzes ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{s+1} + \mathcal{L}[\sin](s)\mathcal{L}[y](s) \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[y](s) \\ \Rightarrow \qquad \mathcal{L}[y](s) &= \frac{s^2+1}{s^2(s+1)} \qquad \textit{(1 Punkt).} \end{aligned}$$

Eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

liefert die Koeffizienten:

$$A = -1, \ \textit{(1/2 Punkt)} \qquad B = 1, \ \textit{(1/2 Punkt)} \qquad C = 2 \ \textit{(1/2 Punkt).}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[s \mapsto -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1}\right](t) \\ &= -1 + t + 2e^{-t}. \qquad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. Fourierreihen *(10 Punkte)*

Die Funktion f sei gegeben als $f(t) = e^{2t}$ auf $[-1, 1[$, 2-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.

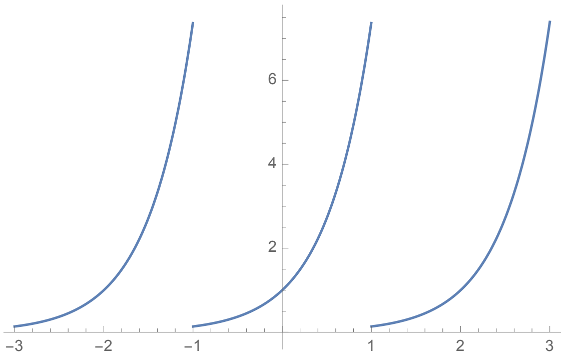
Weiterhin konvergiert die reelle Fourierreihe der Funktion f auf $]-1, 1[$ gegen f, es gilt also:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) \qquad \text{für } t \in]-1, 1[$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-3, 3[$. *(1 Punkt)*

Der Funktionsgraph hat auf $]-3, 3[$ die folgende Form *(1 Punkt)*:



b) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von f. *(2 Punkte)*

Hinweis: Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $e^{i\pi n} = (-1)^n$.

Die Funktion f ist 2-periodisch, also benutzen wir $P = 2$ in der allgemeinen Formel für die komplexen Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-\frac{2\pi int}{P}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{2t} e^{-\pi int} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{(2-in\pi)t} dt \qquad \textit{(1 Punkt)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2 - in\pi} \left[e^{(2-in\pi)t} \right]_{-1}^{1} = \frac{(-1)^n}{2 - in\pi} \sinh(2) \qquad \textit{(1 Punkt).} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Weisen Sie nach, dass für jede P-periodische Funktion g $(P > 0)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, && \text{für } n \geq 0, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}), && \text{für } n \geq 1, \end{aligned}$$

zwischen komplexen und reellen Fourierkoeffizienten von g gelten. *(2 Punkte)*

Wir benutzen $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) g(t)dt \\ &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi int}{P}} + e^{\frac{-2\pi int}{P}}\right) g(t)dt \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\ &= \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{\frac{2\pi int}{P}}dt + \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{-\frac{2\pi int}{P}}dt \\ &= c_{-n} + c_n \qquad \textit{(1/2 Punkt)}, \\ b_n &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) g(t)dt \\ &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi int}{P}} - e^{\frac{-2\pi int}{P}}\right) g(t)dt \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\ &= \frac{i}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{-\frac{2\pi int}{P}}dt - \frac{i}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{\frac{2\pi int}{P}}dt \\ &= i(c_n - c_{-n}) \qquad \textit{(1/2 Punkt)}. \end{aligned}$$

d) Bestimmen Sie mit **c)** die reelle Fourierreihe von f. *(3 Punkte)*

Mit den Formeln aus **c)** ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \sinh(2)\left(\frac{1}{2 - in\pi} + \frac{1}{2 + in\pi}\right) \\ &= \frac{4(-1)^n}{4 + n^2\pi^2}\sinh(2), \qquad \textit{(1 Punkt)} \\ b_n &= (-1)^n \sinh(2) i\left(\frac{1}{2 - in\pi} - \frac{1}{2 + in\pi}\right) \\ &= \frac{2n\pi(-1)^{n+1}}{4 + n^2\pi^2}\sinh(2) \qquad \textit{(1 Punkt)}. \end{aligned}$$

Somit lautet die reelle Fourierreihe von f:

$$\frac{1}{2}\sinh(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{4 + n^2\pi^2}\sinh(2)\cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi(-1)^{n+1}}{4 + n^2\pi^2}\sinh(2)\sin(n\pi t) \quad \textit{(1 Punkt)}.$$

Bitte wenden!

e) Zeigen Sie mithilfe der reellen Fourierreihe von f, dass gilt:

$$\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} = \frac{1}{4\sinh(2)}.$$

(2 Punkte)

Da die Fourierreihe von f auf $]-1, 1[$ gegen f konvergiert, setzen wir $t = 0$ in die Fourierreihe aus **d)** ein und erhalten:

$$1 = \frac{1}{2}\sinh(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} \sinh(2) \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi(-1)^{n+1}}{4 + n^2\pi^2} \sinh(2) \underbrace{\sin(0)}_{=0} \quad \textit{(1 Punkt)}$$

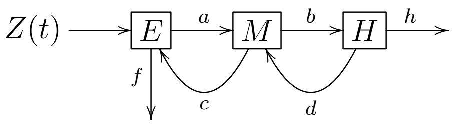
$$\Rightarrow \qquad 1 = \frac{1}{2}\sinh(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} \sinh(2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{4\sinh(2)} = \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} \qquad \textit{(1 Punkt).}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Kompartimentmodell *(10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)*

Ein See bestehe in einem einfachen Modell aus Kompartimenten E, M und H (Epilimnion, Metalimnion, Hypolimnion). Ab der Zeit $t = 0$ erfolgt über E der Eintrag eines Schadstoffes gemäß $Z(t) = c_0 \exp(-2t)$, der in E und H abgebaut wird. Das Modell habe folgende Form:



a) Formulieren Sie ein Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$, in dem $y(t) = (y_E(t), y_M(t), y_H(t))^\top$ die Konzentrationen des Schadstoffs in den drei Kompartimenten beschreibt. *(2 Punkte)*

Das zugehörige Differentialgleichungssystem lautet:

$$y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -(a+f) & c & 0 \\ a & -(b+c) & d \\ 0 & b & -(d+h) \end{pmatrix}}_{\textit{(1 Punkt)}} y(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \exp(-2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\textit{(1 Punkt)}}.$$

Die Parameter seien nun wie folgt gewählt: $a = b = c = d = 1$ und $f = h = 2$.

b) Weisen Sie nach, dass $w_1 = (1, 2, 1)^\top$, $w_2 = (1, -1, 1)^\top$ und $w_3 = (-1, 0, 1)^\top$ Eigenvektoren von A sind und finden Sie die allgemeine Lösung des *homogenen* Systems $y_h'(t) = Ay_h(t)$. *(2 Punkte)*

Die Matrix A lautet mit den gegebenen Parametern wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun Aw_i für $1 \leq i \leq 3$:

$$Aw_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -w_1, \qquad \textit{(1/2 Punkt)}$$

Bitte wenden!

$$Aw_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -4w_2, \qquad \text{\textit{(1/2 Punkt)}}$$

$$Aw_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3w_3 \qquad \text{\textit{(1/2 Punkt).}}$$

Damit sind w_1, w_2 und w_3 Eigenvektoren zu A zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = -3$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet folglich:

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \qquad \text{\textit{(1/2 Punkt).}}$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = (0,0,0)^\top$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $\overline{y}(t) = e^{-2t}(\alpha, \beta, \gamma)^\top$, um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden.

Einsetzen des gegebenen Ansatzes in die inhomogene Differentialgleichung ergibt:

$$-2e^{-2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem für α, β und γ:

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta &= -c_0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0, \qquad \text{\textit{(1 Punkt)}} \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\alpha = \frac{c_0}{2}$, $\beta = \gamma = -\frac{c_0}{2}$ *(1 1/2 Punkte)*. Um die Lösung des Anfangswertproblems zu erhalten, setzen wir $y(t) = y_h(t) + \overline{y}(t)$ und bestimmen C_1, C_2, C_3 so, dass $y(0) = (0,0,0)^\top$, also:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu $C_1 = \frac{c_0}{6}$, $C_2 = -\frac{c_0}{6}$ und $C_3 = \frac{c_0}{2}$ *(1 1/2 Punkte)*. Also lautet die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = \frac{c_0}{6} \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-4t} - 3e^{-3t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} + e^{-4t} - 3e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-4t} + 3e^{-3t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Kann es einen stationären Zustand $y_{\text{stat.}}$ geben, also eine konstante Lösung $y(t) = y_{\text{stat.}}$ von $y'(t) = Ay(t) + g(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Nehmen wir an, $y_{\text{stat.}}$ wäre ein stationärer Zustand, dann wäre

$$\underbrace{0 =}_{\textit{(1 Punkt)}} \frac{d}{dt} y_{\text{stat.}} = Ay_{\text{stat.}} + g(t)$$

$$\Rightarrow \qquad g(t) = -Ay_{\text{stat.}} = \text{const.},$$

ein Widerspruch, da g von t abhängt. Also kann es keinen stationären Zustand geben *(1 Punkt)*.

e) $(*)$ Betrachten Sie nun ein System $z'(t) = Bz(t) + q$, wobei B eine diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrix mit strikt negativen Eigenwerten und $q \in \mathbb{R}^n$ ist. Beweisen Sie, dass das System einen eindeutigen stationären Zustand $z_{\text{stat.}}$ besitzt und $z(t) \to z_{\text{stat.}}$ für $t \to \infty$ gilt. *(5 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Weisen Sie hierzu nach, dass $w(t) := z(t) - z_{\text{stat.}}$ das homogene System $w'(t) = Bw(t)$ löst. Begründen Sie weiterhin, dass $\exp(tB) \to \mathbf{0}_{n\times n}$ für $t \to \infty$.

Zunächst zeigen wir, dass ein eindeutiger stationärer Zustand existiert: Da B diagonalisierbar mit strikt negativen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ist, ist $\det(B) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \neq 0$, also ist B invertierbar *(1 Punkt)*.

Ist $z_{\text{stat.}}$ ein stationärer Zustand, so ist

$$0 = Bz_{\text{stat.}} + q \qquad \Rightarrow \qquad z_{\text{stat.}} = -B^{-1}q. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Nun setzen wir $w(t) := z(t) - z_{\text{stat.}}$ und sehen:

$$w'(t) = \frac{d}{dt}(z(t) - z_{\text{stat.}}) = Bz(t) + q = B(z(t) - z_{\text{stat.}}) = Bw(t) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Die allgemeine Lösung dieses homogenen Systems ist $w(t) = \exp(tB)w(0)$, $w(0) \in \mathbb{R}^n$. Da B diagonalisierbar ist, existiert eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix T mit $B = T\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)T^{-1}$. *(1 Punkt)*

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tB) = \lim_{t\to\infty} T\text{diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t})T^{-1} = \mathbf{0}_{n\times n}. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Dies zeigt die Behauptung, denn

$$z(t) - z_{\text{stat.}} = w(t) = \exp(tB)w(0) \to 0, \text{ für } t \to \infty.$$

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichungen *(10 Punkte)*

Wir betrachten das Randwertproblem auf dem Rechteck $(x, y) \in [0,1] \times [0,2]$:

$$\begin{aligned} &4\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -4\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) \\ &u(x,0) = 0, \qquad u(x,2) = 3\sin(\tfrac{\pi}{2}x) - 4\sin(\tfrac{5\pi}{2}x), \text{ für } x \in [0,1] \\ &u(0,y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}u(1,y) = 0, \text{ für } y \in [0,2], \end{aligned} \tag{2}$$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und geben Sie Differentialgleichungen für X und Y an. *(3 Punkte)*

Hinweis: Wählen Sie das Vorzeichen der auftretenden Konstante so, dass sich für X periodische Lösungen ergeben.

Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ erhält man:

$$\begin{aligned} 4X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) &= -4X(x)Y'(y) \\ \Rightarrow \qquad \frac{Y''(x)}{Y(x)} + 4\frac{Y'(y)}{Y(y)} &= -4\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=:-k^2} = 4k^2 > 0, \qquad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

wobei wir hier verwendet haben, dass die linke Seite der Gleichung nur von x und die rechte nur von y abhängt, sie also beide konstant sein müssen. Weiterhin haben wir $X''(x)/X(x) = -k^2$, $k > 0$ gewählt, damit sich für X periodische Lösungen ergeben. Wir erhalten für X und Y die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} X''(x) + k^2X(x) &= 0, \qquad \textit{(1 Punkt)} \\ Y''(y) + 4Y'(y) - 4k^2Y(y) &= 0. \qquad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für X unter Beachtung der beidseitigen Randbedingungen $X(0) = X'(1) = 0$. *(2 Punkte)*

Die allgemeine Lösung für X lautet

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx), A, B \in \mathbb{R} \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Aus $X(0) = 0$ folgt unmittelbar $A = 0$ *(1/2 Punkt)*, aus $X'(x) = 0$ folgt dann $Bk\cos(k) = 0$, also $k = k_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}_0$ (oder $k = 0$) *(1/2 Punkt)*. Wir haben erhalten:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right) \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für Y unter Beachtung der Randbedingung $Y(0) = 0$. *(2 Punkte)*

Die allgemeine Lösung für Y finden wir mit dem Ansatz: $Y \sim e^{\lambda y}$:

$$(\lambda^2 + 4\lambda - 4k_n^2)e^{\lambda y} = 0,$$

dieser führt auf $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 4k_n^2}$ *(1/2 Punkt)*. Somit erhalten wir:

$$Y(y) = Ce^{(-2+\sqrt{4+4k^2})y} + De^{(-2-\sqrt{4+4k^2})y}, C, D \in \mathbb{R} \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Einsetzen der Randbedingung $Y(0) = 0$ liefert $C = -D$ *(1/2 Punkt)*, also die allgemeine Lösung

$$Y(y) = \widetilde{C}e^{-2y}\sinh(2\sqrt{1+k^2}y), \qquad \widetilde{C} \in \mathbb{R}.$$

d) Bestimmen Sie die Lösung von (2), die allen Randbedingungen genügt, durch Superposition. *(3 Punkte)*

Wir machen den Superpositionsansatz

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sin\left(\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right) e^{-2y} \sinh\left(2\sqrt{1 + \left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right)^2}\,y\right) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Um die Randbedingung auf $[0,1] \times \{2\}$ zu erfüllen, machen wir einen Koeffizientenvergleich:

$$u(x,2) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sin\left(\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right) e^{-4} \sinh\left(4\sqrt{1 + \left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right)^2}\right) \stackrel{!}{=} 3\sin(\tfrac{\pi}{2}x) - 4\sin(\tfrac{5\pi}{2}x).$$

Wir erhalten:

$$F_0 = \frac{3e^4}{\sinh\left(4\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right)}, \qquad F_2 = -\frac{4e^4}{\sinh\left(4\sqrt{1+\frac{25\pi^2}{4}}\right)} \qquad \textit{(1/2 Punkt)}$$

$$F_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,2\}. \qquad \textit{(1/2 Punkt)}$$

Also lautet die gesuchte Lösung:

$$u(x,y) = \frac{3e^{4-2y}\sinh\left(2\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\,y\right)}{\sinh\left(4\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right)} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - \frac{4e^{4-2y}\sinh\left(2\sqrt{1+\frac{25\pi^2}{4}}\,y\right)}{\sinh\left(4\sqrt{1+\frac{25\pi^2}{4}}\right)} \sin\left(\tfrac{5\pi}{2}x\right).$$

(1 Punkt)