

# Lösungen Mathematik III, D-HEST, Prüfung vom 10.8.2015

## Aufgabe 1

(a) Für die Matrix  $A$  liest man aus dem Box-Diagramm ab:

$$A = \begin{pmatrix} -b & c & a \\ b & -(c+d) & 0 \\ 0 & d & -a \end{pmatrix}$$

(b) Stationäre Lösungen  $y(t) = y_\infty \in \mathbb{R}^3$ , für  $t \geq 0$ , erfüllen  $y'(t) = 0$ , d.h. es gilt  $Ay_\infty = 0$ .

(i) Um zu zeigen, dass eine nichttriviale stationäre Lösung existiert genügt es also nachzuprüfen, dass das LGS  $Ay = 0$  nichttriviale Lösungen hat, d.h. dass  $A$  singularär ist. Dies ist der Fall, da die Zeilensumme von  $A$  Null ist. Alternativ prüft man nach, dass  $\det(A) = 0$ .

(ii) Das LGS  $Ay = 0$  lautet für  $d = 0$

$$\begin{pmatrix} -b & c & a \\ b & -c & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Die dritte Gleichung liefert  $y_3 = 0$ , dann folgt aus der ersten Gleichung  $by_1 = cy_2$ . Also sind die stationären Lösungen

$$\lambda \begin{pmatrix} c \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Um die allgemeine Lösung zu finden berechnen wir zuerst die Eigenwerte von  $A$ , indem wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) = \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2\right) \\ &= -\lambda \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) (1 + \lambda). \end{aligned}$$

Wir lesen die Nullstellen ab:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Einen Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  haben wir im Teil (b) bereits berechnet:  $v_1 = (1, 1, 0)$ . Um einen Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  zu finden, lösen wir  $(A - \lambda_2 I)y = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{also } y_1 = 0 \text{ und } y_2 = -y_3.$$

D.h. wir erhalten  $v_2 = (0, 1, -1)$ . Für  $\lambda_3 = -1$  gehen wir analog vor und lösen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{also } y_3 = 0 \text{ und } y_2 = -y_1.$$

D.h. wir erhalten  $v_3 = (1, -1, 0)$ . Somit lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } C_i \in \mathbb{R}.$$

Am Limes  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = C_1 v_1$  lesen wir ab, dass die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  genau dann verschwindet, wenn  $C_1 = 0$ , also für die Anfangsdaten der Form

$$C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

## Aufgabe 2

- (a) Stationäre Lösungen  $y(t) = y_\infty = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , für  $t \geq 0$ , erfüllen  $y'(t) = 0$ . Wir prüfen dies nach für  $y_\infty = (1, 1)$ , und finden tatsächlich:

$$y_1'(t) = -y_2 + y_1 y_2 = -1 + 1 = 0,$$

$$y_2'(t) = y_1 - y_1^2 y_2 = 1 - 1 = 0.$$

Um nun *alle* stationären Lösungen zu finden, müssen wir also das Gleichungssystem

$$-y_2 + y_1 y_2 = y_2(y_1 - 1) = 0,$$

$$y_1 - y_1^2 y_2 = y_1(1 - y_1 y_2) = 0$$

lösen: Falls  $y_2 = 0$  folgt aus der zweiten Gleichung  $y_1 = 0$ . Falls  $y_2 \neq 0$  folgt aus der ersten Gleichung  $y_1 = 1$  und dann aus der zweiten  $y_2 = 1$ . Also ist die einzige weitere stationäre Lösung  $y_\infty = (0, 0)$ .

- (b) Wir berechnen

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = y_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = -1 + y_1 \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = 1 - 2y_1 y_2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2} = -y_1^2$$

und erhalten für  $(y_1, y_2) = (1, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Da  $A$  eine Dreiecksmatrix ist, lesen wir die Eigenwerte sofort auf der Diagonalen ab:  $-1$  und  $1$ .
- (d) Da wir zwei reelle Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen haben, ist Bild C die richtige Antwort, denn die allgemeine Lösung lautet  $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ .
- (e) Um ein Verhalten wie in Bild D zu haben, muss die Matrix  $DG(y_\infty)$  komplexe Eigenwerte  $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$  haben, mit  $a > 0, b \neq 0$ : Die Bedingung  $a > 0$  stellt sicher, dass die Lösung sich mit wachsendem  $t$  vom Ursprung entfernt, und  $b \neq 0$ , dass die Lösung dies spiralförmig tut.

Die Eigenwerte der Matrix  $DG(y_\infty)$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \beta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda + 1$$

also  $\lambda_i = \frac{1}{2}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4})$ . Damit der Realteil positiv ist, muss  $\beta > 0$  sein, und damit die Lösungen komplex sind muss der Radikand  $\beta^2 - 4 < 0$  sein. Dies ist der Fall für  $\beta^2 < 4$ . Beide Bedingungen gleichzeitig sind also erfüllt für  $0 < \beta < 2$ .

### Ausgabe 3

- (a) Der Separationsansatz  $u(x, t) = \sin(cx)g(t)$  soll die Randbedingung (RB) erfüllen, d.h.  $0 = u(0, t) = \sin(0)g(t)$  (automatisch erfüllt) und  $0 = u(\pi, t) = \sin(c\pi)g(t)$ , also  $c \in \mathbb{N}$ .

Einsetzen des Separationsansatzes  $u(x, t) = \sin(cx)g(t)$  in (PDE) liefert

$$u_t(x, t) = \sin(cx)g'(t) = -c^2 \sin(cx)g(t) = u_{xx}(x, t).$$

Also muss  $g'(t) = -c^2 g(t)$  sein, d.h.  $g(t) = K e^{-c^2 t}$ .

Wir erhalten also die Lösungen

$$u(x, t) = K \sin(cx) e^{-c^2 t} \text{ für } K \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{N}.$$

- (b) Wir folgen dem Hinweis und berechnen die  $2\pi$ -periodische Fourier-Reihe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -37 & \text{falls } -\pi < x \leq 0 \\ 37 & \text{falls } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Da die Funktion  $f$  ungerade ist, hat die Fourier-Reihe die Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ . Die Fourier-Koeffizienten berechnen wir mit der Formel

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) f(x) dx \\ &= \frac{74}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{74}{\pi k} (1 - \cos(k\pi)) = \begin{cases} \frac{148}{\pi k} & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$f(x) = \frac{148}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

Jede Superposition

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin(nt) e^{-n^2 t}$$

der in (a) gefundenen Lösungen erfüllt (PDE) und (RB). Um die Anfangsbedingung (AB) auch noch zu erfüllen sind die Koeffizienten  $K_n$  so zu wählen, dass  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin(nx) = f(x)$  gilt. Durch Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Reihe von  $f$  liest man ab:

$$u(x, t) = \frac{148}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x) \exp(-(2n+1)^2 t).$$

- (c) Um  $t$  zu bestimmen verwenden wir nur den ersten Term der in (b) gefundenen Reihe (die übrigen Terme fallen in  $t$  stark ab und können vernachlässigt werden). Für  $t$  muss also gelten

$$\frac{148}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \exp(-t) = 30.$$

Durch Logarithmieren erhalten wir daraus

$$t = \ln \frac{148}{30\pi}.$$