D–HEST / Lehrdiplom Mathematik

Prüfung Mathematik III

401-0293-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei $y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System. Für welchen Wert $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,2} = 2$

(B) $y_{\infty,2} = -\frac{1}{2}$

(C) $y_{\infty,2} = -2$

(D) $y_{\infty,2} = 1$

1.MC2 [1 Punkt] Sei $V = M_{4\times 4}$ der Vektorraum der 4×4 - Matrizen mit reellen Einträgen. Welche Dimension hat der Unterraum $U = \Big\{A \in V \mid A^\top = A\Big\}$? Dabei bezeichnet $A^\top$ die transponierte Matrix.

(A) $\dim_{\mathbb{R}} U = 10$

(B) $\dim_{\mathbb{R}} U = 12$

(C) $\dim_{\mathbb{R}} U = 8$

(D) $\dim_{\mathbb{R}} U = 6$

1.MC3 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Was ist der fehlende Eigenwert λ_2?

(A) $\lambda_2 = 1$

(B) $\lambda_2 = -1$

(C) $\lambda_2 = -2$

(D) $\lambda_2 = 3$

1.MC4 [1 Punkt] Es sei A eine 3×3 - Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Ausserdem ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Welche Matrix J ist dann eine Jordan Normalform der Matrix A?

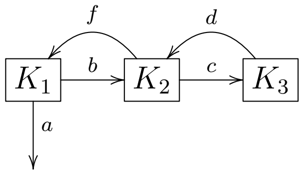
(A) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(B) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(C) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(D) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

1.MC5 [1 Punkt] Es seien a, b, c, d, f positive reelle Zahlen. Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell



Das Kompartimentmodell wird durch ein DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ mit $A \in M_{3\times 3}$ beschrieben, wobei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ die Stoffmenge in den Kompartimenten K_1, K_2, und K_3 beschreibt. Welche Matrix A passt zum obigen Kompartimentmodell?

(A) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & f & 0 \\ b & -(c+f) & d \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & f & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & f & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & 0 & 0 \\ b & -c & d \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$

1.A1 [3 Punkte] Wir betrachten das System $y'(t) = Jy(t)$ mit $t \geq 0$, und $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie das Matrix-Exponential e^{tJ}.

(ii) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie, mit Hilfe von (i), die Lösung des Systems mit Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

1.A2 [6 Punkte] Wir betrachten das System $y'(t) = Jy(t)$, und $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir definieren die Funktionen $v_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2(t) = \begin{pmatrix} X \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten X, Y und Z, sodass $t \mapsto v_1(t), t \mapsto v_2(t)$ und $t \mapsto v_3(t)$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$ des Systems $y'(t) = Jy(t)$ ergeben.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Sei $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = c|x|$. Hier bezeichnet $|\cdot|$ den Betrag, und $c \in \mathbb{R}$ ist eine Konstante. Für welchen Wert c hat die Fourier-Reihe der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion f die Form $1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x)+b_k \sin(k\pi x)$? Wobei a_k und b_k, für $k \geq 1$, die Fourier-Koeffizienten sind.

(A) $c = 2$

(B) $c = 1$

(C) $c = \frac{1}{2}$

(D) $c = 4$

2.MC2 [1 Punkt] Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe einer Funktion f, für die

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} \text{ und } b_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}, \qquad k \geq 1$$

bekannt sind.

Sei $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe der Ableitungsfunktion f'. Bestimmen Sie den **vierten** Fourier-Koeffizienten A_4 dieser Fourier-Reihe.

(A) $A_4 = 1$

(B) $A_4 = -\frac{1}{2}$

(C) $A_4 = 2$

(D) $A_4 = -2$

2.MC3 [1 Punkt] Wir betrachten den Vektorraum der Polynome $\mathcal{P}_{\leq 2}$ vom Grad ≤ 2, ausgestattet mit einer Basis $b_1(x) = 5, b_2(x) = x, b_3(x) = x^2$. Welcher der folgenden Vektoren ist der Koordinatenvektor des Polynoms $p(x) = 8x^2 - 2x + 5$ bezüglich dieser Basis?

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.MC4 [1 Punkt] Gegeben sei $(\mathcal{P}_{\leq 2}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2, ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Für welchen Wert b sind die zwei Polynome

$$p_1(x) = 1 \text{ und } p_2(x) = x^2 + b$$

orthogonal ?

(A) $-\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) -1

2.A1 [6 Punkte] Wir definieren die Funktion $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{2}x$.

(i) **[1 Punkt]** Skizzieren Sie die 2-periodische Fortsetzung F von der Funktion f auf dem Intervall $[-3, 3[$ in das Koordinaten-System in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

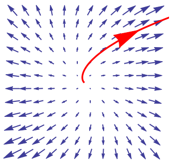
(ii) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k der Fourier-Reihe von F. Lösen Sie dabei trigonometrische Terme so weit wie möglich auf.

(iii) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe von F.

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1**.

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & d \end{pmatrix}$. Für welches d sieht die Lösungkurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



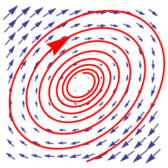
(A) $d = 1$

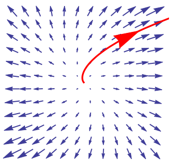
(B) $d = -1$

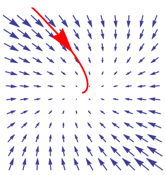
(C) $d = -\frac{1}{2}$

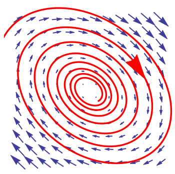
(D) $d = 0$

3.MC2 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Graphiken zeigt die Lösungskurve in der Nähe von y_∞?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

3.MC3 [1 Punkt] In einem Räuber-Beute-Modell beschreibe x die Räuberpopulation und y die Beutepopulation:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{1}{20}x(t)y(t),$$
$$y'(t) = 5y(t)\left(10 - \frac{1}{5}y(t)\right) - x(t)y(t).$$

Der Räuberbestand zu Beginn sei $x(0) = 10$. Für welche Beute $y(0)$ bleibt y konstant?

(A) $y(0) = 40$

(B) $y(0) = 20$

(C) $y(0) = 30$

(D) $y(0) = 50$

3.MC4 [**1 Punkt**] Im Modell **von 3.MC3** nehmen wir an, dass es keine Räuber gibt, also $x(t) = 0$ für alle t. Sei ausserdem $y(0) = 100$. Was passiert mit der Beute $y(t)$?

(A) Die Beute reduziert sich bis zum Fixpunkt $y_\infty > 0$.

(B) Die Beute wächst unbegrenzt.

(C) Die Beute stirbt aus.

(D) Die Beute wächst bis zum Fixpunkt $y_\infty > 0$.

3.MC5 [**1 Punkt**] Sei $y' = F(y)$ ein DGL-System mit Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wir wissen schon, dass die Jacobi-Matrix von F gegeben ist durch $DF \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y_2 \\ y_2 e^{y_1} - e & e^{y_1} \end{pmatrix}$, und dass $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt des DGL-System ist. Was können Sie über die Stabilität dieses Fixpunktes sagen?

(A) Der Fixpunkt ist instabil.

(B) Der Fixpunkt ist ein Sattelpunkt.

(C) Der Fixpunkt ist stabil.

(D) Man kann keine Aussage über die Stabilität des Fixpunkt machen.

3.A1 [**2 Punkte**] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $F(y) = \begin{pmatrix} y_1(y_2 - \pi) \\ \cos(y_1) - \sin(y_2) \end{pmatrix}$.

Bestimmen sie alle Fixpunkte $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{1,\infty} \\ y_{2,\infty} \end{pmatrix}$ für die gilt, dass $0 \leq y_{1,\infty} \leq \pi$ und $0 \leq y_{2,\infty} \leq \pi$.

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1**.

3.A2 [**4 Punkte**] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $F(y) = \begin{pmatrix} -y_2 + y_1 y_2 \\ y_1 - y_1^2 y_2 \end{pmatrix}$.

(i) [**1 Punkt**] Zeigen Sie, dass $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt des Systems ist.

(ii) [**2 Punkte**] Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(y_\infty)$ und ihre Eigenwerte.

(iii) [**1 Punkt**] Machen Sie eine Aussage über die Stabilität des Fixpunktes.

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2**.

Aufgabe 4

4.MC1 [1 Punkt] Die Funktionen v und w seien zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$tu_{tt}(x,t) + xu_{xx}(x,t) = 0.$$

Welche der folgenden Funktionen ist dann sicher wieder eine Lösung der Gleichung?

(A) $v + w$
(B) vw
(C) v^2
(D) w^2

4.MC2 [1 Punkt] Betrachten Sie die folgende PDE in $\mathbb{R}^2$ mit Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{in } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u &= 4, && \text{auf dem Rand } \partial B. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

(A) $u(0) = 4$
(B) $u(0) = 1$
(C) $u(0) = 2$
(D) $u(0) = 3$

4.A1 [13 Punkte] Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad \text{für } x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R}. \tag{PDE}$$

Es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad u_x(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}, \tag{RB}$$

und die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right), \qquad \text{für } x \in (0,\pi). \tag{AB}$$

(i) **[3 Punkte]** Machen Sie den Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für f und g. Beachten Sie, dass die Funktion f periodisch sein soll.

(ii) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen von f und g.

(iii) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie alle Lösungen von (PDE), welche in der x-Variable 4π-periodisch sind und die Randbedingungen (RB) erfüllen.

(iv) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie nun durch Superposition die Lösung von (PDE), welche die Randbedingung (RB) und die Anfangsbedingung (AB) erfüllt.

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.