Aufgaben und Lösungsvorschlag
Gruppe A

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei $y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System. Für welchen Wert $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,2} = 1$

(B) $y_{\infty,2} = -\frac{1}{2}$

(C) $y_{\infty,2} = -2$

(D) **TRUE:** $y_{\infty,2} = 2$

Lösung:

Für eine stationäre Lösung gilt $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{2,\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aus der zweiten Zeile folgt dann $y_{\infty,2} = 2$

1.MC2 [1 Punkt] Sei $V = M_{4\times4}$ der Vektorraum der 4×4 - Matrizen mit reellen Einträgen. Welche Dimension hat der Unterraum $U = \left\{A \in V \mid A^\top = A\right\}$? Dabei bezeichnet $A^\top$ die transponierte Matrix.

(A) $\dim_{\mathbb{R}} U = 6$

(B) $\dim_{\mathbb{R}} U = 12$

(C) **TRUE:** $\dim_{\mathbb{R}} U = 10$

(D) $\dim_{\mathbb{R}} U = 8$

Lösung:

Jede Matrix A in dem Vektorraum ist eindeutig bestimmt durch die Einträge oberhalb der Diagonalen. Oberhalb der Diagonalen hat eine Matrix A aus $M_{4\times4}$ insgesamt $4+3+2+1 = 10$ Einträge.

1.MC3 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Was ist der fehlende Eigenwert λ_2?

(A) $\lambda_2 = -1$

(B) $\lambda_2 = -2$

(C) **TRUE:** $\lambda_2 = 1$

(D) $\lambda_2 = 3$

Lösung:

Es gilt $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + 3 = 4$. Also $\lambda_2 = 1$. *Alternative Lösung*: Es gilt $\det(A) = 2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2\lambda_2$. Also $\lambda_2 = 1$.

1.MC4 [1 Punkt] Es sei A eine 3×3 - Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Ausserdem ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Welche Matrix J ist dann eine Jordan Normalform der Matrix A?

(A) **TRUE:** $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(B) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

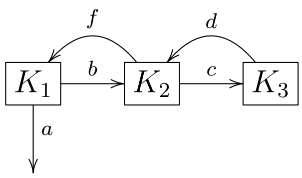
(C) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(D) $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

Lösung:

Weil A nicht diagonalisierbar ist und weil $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1$, gibt es einen Jordan-Block der Länge 2 mit 1 auf der Diagonalen, und einen Jordan-Block der Länge 1 mit 2 auf der Diagonalen.

1.MC5 [1 Punkt] Es seien a, b, c, d, f positive reelle Zahlen. Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell



Das Kompartimentmodell wird durch ein DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ mit $A \in M_{3\times 3}$ beschrieben, wobei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ die Stoffmenge in den Kompartimenten K_1, K_2, und K_3 beschreibt. Welche Matrix A passt zum obigen Kompartimentmodell?

(A) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & f & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & f & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & f & 0 \\ b & -(c+f) & d \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & 0 & 0 \\ b & -c & d \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$

Lösung:

Für das Kompartiment K_1 haben wir Abflüsse a und b, und einen Zufluss f aus K_2. Das ergibt $((-a+b), f, 0)$ für die erste Zeile. Für das Kompartiment K_2 haben wir Abflüsse c und f, und Zuflüsse b und d aus den Kompartimenten K_1 und K_3. Das ergibt $(b, -(c+f), d)$ für die zweite Zeile. Für das Kompartiment K_3 haben wir einen Abfluss d, und einen Zufluss c aus K_2. Das ergibt $(0, c, -d)$ für die dritte Zeile.

1.A1 [3 Punkte] Wir betrachten das System $y'(t) = Jy(t)$ mit $t \geq 0$, und $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie das Matrix-Exponential e^{tJ}.

(ii) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie, mit Hilfe von (i), die Lösung des Systems mit Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Da die Matrix J in Diagonalform ist gilt, dass $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$. Eine spezielle Lösung mit dem angegeben Anfangswert ist dann $y(t) = e^{tJ} y(0) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

1.A2 [6 Punkte] Wir betrachten das System $y'(t) = Jy(t)$, und $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir definieren die Funktionen $v_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2(t) = \begin{pmatrix} X \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten X, Y und Z, sodass $t \mapsto v_1(t), t \mapsto v_2(t)$ und $t \mapsto v_3(t)$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$ des Systems $y'(t) = Jy(t)$ ergeben.

Lösung:

Aus der Formel für das Matrixexponential von Jordanblöcken gilt, dass

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von e^{tJ} sind eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$, also ist

$$X = te^t\ , \quad Y = 0 \quad \text{und} \quad Z = e^{2t}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Sei $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = c|x|$. Hier bezeichnet $|\cdot|$ den Betrag, und $c \in \mathbb{R}$ ist eine Konstante. Für welchen Wert c hat die Fourier-Reihe der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion f die Form $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)$? Wobei a_k und b_k, für $k \geq 1$, die Fourier-Koeffizienten sind.

(A) **TRUE:** $c = 2$

(B) $c = 4$

(C) $c = 1$

(D) $c = \frac{1}{2}$

Lösung:

Es gilt $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = c\int_{-1}^{1} |x|dx = 2c\int_{0}^{1} x\ dx = c$. Also $c = 2$, weil die Reihe mit $\frac{a_0}{2}$ anfängt.

2.MC2 [1 Punkt] Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe einer Funktion f, für die

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} \text{ und } b_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}, \qquad k \geq 1$$

bekannt sind.

Sei $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe der Ableitungsfunktion f'. Bestimmen Sie den **vierten** Fourier-Koeffizienten A_4 dieser Fourier-Reihe.

(A) $A_4 = -\frac{1}{2}$

(B) $A_4 = -2$

(C) **TRUE:** $A_4 = 1$

(D) $A_4 = 2$

Lösung:

Es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k) \cos(kx) + (-ka_k) \sin(kx) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx).$$

Mit Koeffizientenvergleich gilt also, dass $A_k = kb_k$. Somit ist $A_4 = 4b_4 = 4\frac{4(-1)^4}{4^2} = 1$.

2.MC3 [1 Punkt] Wir betrachten den Vektorraum der Polynome $\mathcal{P}_{\leq 2}$ vom Grad ≤ 2, ausgestattet mit einer Basis $b_1(x) = 5, b_2(x) = x, b_3(x) = x^2$. Welcher der folgenden Vektoren ist der Koordinatenvektor des Polynoms $p(x) = 8x^2 - 2x + 5$ bezüglich dieser Basis?

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Der Koordinatenvektor hat die Form $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, mit $c_1 \cdot b_1(x) + c_2 \cdot b_2(x) + c_3 \cdot b_3(x) = p(x)$. Einsetzen liefert $c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 = 8x^2 - 2x + 5$. Vergleich der Koeffizienten ergibt als Koordinatenvektor: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2.MC4 [1 Punkt] Gegeben sei $(\mathcal{P}_{\leq 2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2, ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Für welchen Wert b sind die zwei Polynome

$$p_1(x) = 1 \text{ und } p_2(x) = x^2 + b$$

orthogonal ?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) -1

(C) **TRUE:** $-\frac{1}{3}$

(D) 1

Lösung:

Damit die Polynome orthogonal sind, muss gelten dass

$$0 = \langle p_1, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + b)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx + b \int_{-1}^{1} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 2b = \frac{2}{3} + 2b.$$

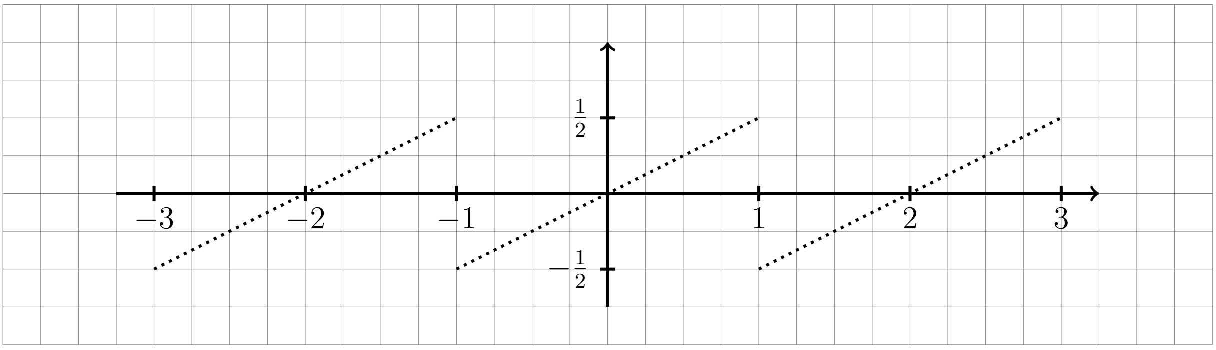
Also gilt $b = -\frac{1}{3}$.

2.A1 [6 Punkte] Wir definieren die Funktion $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{2}x$.

(i) **[1 Punkt]** Skizzieren Sie die 2-periodische Fortsetzung F von der Funktion f auf dem Intervall $[-3, 3[$ in das Koordinaten-System in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Lösung:

Die Lösung ist die gestrichelte Linie in der folgenden Graphik.



(ii) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k der Fourier-Reihe von F. Lösen Sie dabei trigonometrische Terme so weit wie möglich auf.

Lösung:

Weil die Funktion f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$. Die allgemeine Formel für die Koeffizienten mit Periode T is

$$a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{k2\pi x}{T}\right) dx, \quad b_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{k2\pi x}{T}\right) dx.$$

Für die Koeffizienten b_k mit Periode $T = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^{1} \frac{x}{2} \sin(k\pi x)\, dx = 2\int_0^1 \frac{x}{2} \sin(k\pi x) dx = 2\left[\frac{-x}{2k\pi}\cos(k\pi x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 -\frac{\cos(k\pi x)}{2k\pi} dx \\ &= \frac{-\cos(k\pi)}{k\pi} + \left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{-\cos(k\pi)}{k\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}. \end{aligned}$$

(iii) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe von F.

Lösung:

Berechnung mit Formel: Die Umformung von den reellen zu den komplexen Fourier Koeffizienten liefert für $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{2}\begin{cases} a_k - ib_k & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ a_{-k} + ib_{-k} & \text{für } k < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{-i(-1)^{k+1}}{k\pi} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i(-1)^{(-k)+1}}{(-k)\pi} & \text{für } k < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{i(-1)^k}{2k\pi} & \text{für } k \neq 0, \\ 0 & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Im letzten Schritt benutzen wir, dass $(-1)^{-k} = (-1)^k$.

Direkte Berechnung: Die allgemeine Formel ist gegeben durch

$$c_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-2k\pi i x/T}\, dx.$$

In diesem Fall gilt also

$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x e^{-k\pi i x}\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{-x}{k\pi i} e^{-k\pi i x}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{-1}{k\pi i} e^{-k\pi i x}\, dx \right)$$

Das letzte Integral ergibt

$$\frac{1}{(k\pi i)^2} e^{-k\pi i x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{(k\pi i)^2}\left(e^{k\pi i} - e^{-k\pi i}\right) = 0.$$

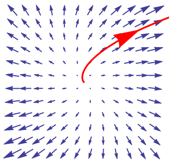
Also erhalten wir

$$c_k = \frac{-1}{4k\pi i}\left(e^{-k\pi i} + e^{k\pi i}\right) = \frac{i(-1)^k}{2k\pi}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1**.

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & d \end{pmatrix}$. Für welches d sieht die Lösungkurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



(A) **TRUE:** $d = 1$

(B) $d = -\dfrac{1}{2}$

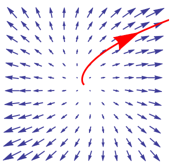
(C) $d = 0$

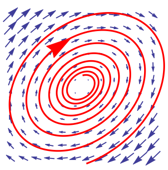
(D) $d = -1$

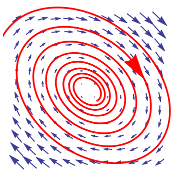
Lösung:

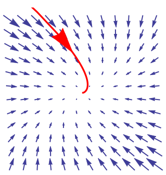
Die Graphik zeigt einen instabilen Fixpunkt, ohne kreisförmige Bewegung. Nach Hartman-Grobman, müssen alle Eigenwerte positive und reell sein.

3.MC2 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Graphiken zeigt die Lösungskurve in der Nähe von y_∞?

(A) 

(B) **TRUE:** 

(C) 

(D) 

Lösung:

Das charakteristische Polynom ist $\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)+1 = \lambda^2-\lambda+1$. Die Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Der Realteil der komplexen Eigenwerte ist positiv. Somit handelt es sich, nach Hartman-Grobman, um einen instabilen Fixpunkt. Die Lösung bewegt sich in der Nähe des Fixpunkts kreisförmig vom Fixpunkt weg.

3.MC3 [1 Punkt] In einem Räuber-Beute-Modell beschreibe x die Räuberpopulation und y die Beutepopulation:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{1}{20}x(t)y(t),$$
$$y'(t) = 5y(t)\left(10 - \frac{1}{5}y(t)\right) - x(t)y(t).$$

Der Räuberbestand zu Beginn sei $x(0) = 10$. Für welche Beute $y(0)$ bleibt y konstant?

(A) $y(0) = 20$

(B) $y(0) = 50$

(C) **TRUE:** $y(0) = 40$

(D) $y(0) = 30$

Lösung:

Wir beschreiben den konstanten Zustand mit y^∞. Das heisst für alle t gilt $y(t) = y^\infty = y(0)$. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$0 = 5y^\infty\left(10 - \frac{1}{5}y^\infty\right) - x(t)y^\infty = 50y^\infty - (y^\infty)^2 - x(t)y^\infty.$$

Damit die rechte Seite konstant ist, muss auch x konstant sein, und somit $x(t) = x(0) = 10$ für alle t. Wir erhalten also die Gleichung $50y^\infty - (y^\infty)^2 - 10y^\infty = 40y^\infty - (y^\infty)^2$. Diese hat die Lösungen 0 und 40, und somit ist 40 die korrekte Antwort.

3.MC4 [1 Punkt] Im Modell **von 3.MC3** nehmen wir an, dass es keine Räuber gibt, also $x(t) = 0$ für alle t. Sei ausserdem $y(0) = 100$. Was passiert mit der Beute $y(t)$?

(A) Die Beute wächst unbegrenzt.

(B) **TRUE:** Die Beute reduziert sich bis zum Fixpunkt $y_\infty > 0$.

(C) Die Beute stirbt aus.

(D) Die Beute wächst bis zum Fixpunkt $y_\infty > 0$.

Lösung:

Die zweite Gleichung ist

$$y'(t) = 5y(t)\left(10 - \frac{1}{5}y(t)\right).$$

Wir lesen ab, dass $y'(0) < 0$ für $y(0) = 100$, also nimmt die Beute zunächst ab. Ausserdem ist $y'(t) < 0$ wenn $y(t) > 50$. Also fällt die $y(t)$ bis zur stationären Punkt $y_\infty = 50 > 0$.

3.MC5 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein DGL-System mit Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wir wissen schon, dass die Jacobi-Matrix von F gegeben ist durch $DF\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y_2 \\ y_2 e^{y_1} - e & e^{y_1} \end{pmatrix}$, und dass $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt des DGL-System ist. Was können Sie über die Stabilität dieses Fixpunktes sagen?

(A) Der Fixpunkt ist stabil.

(B) Der Fixpunkt ist ein Sattelpunkt.

(C) **TRUE:** Der Fixpunkt ist instabil.

(D) Man kann keine Aussage über die Stabilität des Fixpunkt machen.

Lösung:

Die Jacobi-Matrix ausgewertet an dem Fixpunkt ist gegeben durch

$$DF\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind 1 und e. Also ist der Fixpunkt instabil, nach Harman-Grobman.

3.A1 [2 Punkte] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $F(y) = \begin{pmatrix} y_1(y_2 - \pi) \\ \cos(y_1) - \sin(y_2) \end{pmatrix}$.

Bestimmen sie alle Fixpunkte $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{1,\infty} \\ y_{2,\infty} \end{pmatrix}$ für die gilt, dass $0 \le y_{1,\infty} \le \pi$ und $0 \le y_{2,\infty} \le \pi$.

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1**.

Lösung:

Wenn $y_1 = 0$ folgt $\sin(y_2) = 1$, also $y_2 = \frac{2n+1}{2}\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Wenn $y_1 \neq 0$ gilt $y_2 = \pi$ und $\cos(y_1) = 0$ also $y_1 = \frac{2n+1}{2}\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Die gesuchten Fixpunkte sind also

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}.$$

3.A2 [4 Punkte] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $F(y) = \begin{pmatrix} -y_2 + y_1 y_2 \\ y_1 - y_1^2 y_2 \end{pmatrix}$.

(i) **[1 Punkt]** Zeigen Sie, dass $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt des Systems ist.

(ii) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(y_\infty)$ und ihre Eigenwerte.

(iii) **[1 Punkt]** Machen Sie eine Aussage über die Stabilität des Fixpunktes.

Lösung:

(i) Das ist klar wenn man y_∞ in die Funktion F einsetzt.

(ii) Die Jacobi-Matrix ist gegeben durch

$$DF(y) = \begin{pmatrix} y_2 & -1 + y_1 \\ 1 - 2y_1y_2 & -y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weil das eine Dreiecksmatrix ist, sind die Eigenwerte 1 und -1.

(iii) Die Jacobi-Matrix hat einen positiven und einen negativen Eigenwert. Somit handelt es sich, nach Hartman-Grobman, um einen Sattelpunkt.

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2**.

Aufgabe 4

4.MC1 [1 Punkt] Die Funktionen v und w seien zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$tu_{tt}(x,t) + xu_{xx}(x,t) = 0.$$

Welche der folgenden Funktionen ist dann sicher wieder eine Lösung der Gleichung?

(A) **TRUE:** $v + w$

(B) v^2

(C) w^2

(D) vw

Lösung:

Es gilt

$$t(v+w)_{tt} + x(v+w)_{xx} = tv_{tt} + xv_{xx} + tw_{tt} + xw_{xx} = 0.$$

Also ist $v + w$ wieder eine Lösung. Ein Gegenbeispiel für alle anderen Optionen ist $v(x,t) = w(x,t) = t$.

4.MC2 [1 Punkt] Betrachten Sie die folgende PDE in $\mathbb{R}^2$ mit Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{in } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u &= 4, && \text{auf dem Rand } \partial B. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

(A) $u(0) = 3$

(B) $u(0) = 1$

(C) $u(0) = 2$

(D) **TRUE:** $u(0) = 4$

Lösung:

Lösung mit dem Maximumprinzip: Wenn die Funktion u konstant ist, dann folgt $u(0) = 4$. Wenn u nicht konstant ist, so muss die Funktion u ihr Minimum am Rand annehmen, wegen dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen. Damit können wir die Fälle $u(0) = 1$, $u(0) = 2$, und $u(0) = 3$ ausschliessen.

Lösung mit der Mittelwerteigenschaft: Angenommen, u ist eine Lösung. Dann folgt mit der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B|} \int_{\partial B} u(x,y)\; d(x,y) = 4.$$

4.A1 [13 Punkte] Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad \text{für } x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R}. \tag{PDE}$$

Es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad u_x(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}, \tag{RB}$$

und die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right), \qquad \text{für } x \in (0,\pi). \tag{AB}$$

(i) **[3 Punkte]** Machen Sie den Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für f und g. Beachten Sie, dass die Funktion f periodisch sein soll.

Lösung:

Wenn $u(x,t) = f(x)g(t)$ eine Lösung ist, dann gilt für alle x und alle t, dass

$$f''(x)g(t) = f(x)g''(t).$$

Daraus folgt

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} = \kappa$$

für eine Konstante $\kappa > 0$. Nur $\kappa = -\omega^2 < 0$ liefert periodische Lösungen f.

(ii) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen von f und g.

Lösung:

Die allgemeinen Lösungen der DGLs von f und g sind

$$f(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x) \text{ und } g(t) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t),$$

für Konstanten $\tilde{A}, \tilde{B}, C, D \in \mathbb{R}$.

(iii) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie alle Lösungen von (PDE), welche in der x-Variable 4π-periodisch sind und die Randbedingungen (RB) erfüllen.

Lösung:

Aus (RB) folgt $f(0) = 0$ und $C = 0$. Aus (RB) folgt $f'(\pi) = D\cos(\omega\pi) = 0$. Weil die Funktion f Periode 4π haben soll folgt damit $\omega = \omega_n = \frac{2n+1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Insgesamt, haben wir

$$u(x,t) = f(x)g(t) = \sin(\omega_n x)\left(A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)\right),$$

wobei $A = D\tilde{A}$, $B = D\tilde{B}$ und $\omega_n = \frac{2n+1}{2}$.

(iv) [**5 Punkte**] Bestimmen Sie nun durch Superposition die Lösung von (PDE), welche die Randbedingung (RB) und die Anfangsbedingung (AB) erfüllt.

Lösung:

Mit dem Superpositions-Prinzip schreiben wir

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\omega_n x)\left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right),$$

mit $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Aus der ersten Bedingung in (AB) folgt

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

folgt $A_0 = 1$ und $A_n = 0$ wenn $n \neq 0$. Aus der zweiten Bedingung folgt

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n B_n \sin(\omega_n x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right).$$

Damit haben wir $B_1 = \frac{2}{3}$ und $B_n = 0$ wenn $n \neq 1$. Die Lösung ist also

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_0 \sin(\omega_0 x)\cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_1 x)\sin(\omega_1 t) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\sin\left(\frac{3}{2}t\right). \end{aligned}$$

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem **Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.