Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2009**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) 1/2.

b) $+\infty$, 0

c) 1, 1, -1/2.

d) 0.

e) Wir haben

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+x+1)}{(1+x)^2} > 0,$$

für alle $x \geq 0$.

2. (*10 Punkte*)

a) $z = \dfrac{-5+12i}{7+\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = (-5+12i)\dfrac{1}{7+1-i} = (-5+12i)\dfrac{8+i}{65} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{5}i.$

b) $z = \dfrac{3+2i}{2-i} - \dfrac{-1+i}{1+2i} = \dfrac{(3+2i)(1+2i)+(1-i)(2-i)}{(2-i)(1+2i)} = \dfrac{5i}{4+3i} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i.$

c) $z = (-1+\sqrt{3}i)^5(1-i) = (2e^{i\frac{2}{3}\pi})^5.\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2^5\sqrt{2}e^{i\frac{10}{3}\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 32\sqrt{2}e^{i\frac{37}{12}\pi} = 32\sqrt{2}e^{i\frac{13}{12}\pi}$. Deshalb erhalten wir $|z| = 32\sqrt{2}$ und $\arg(z) = \frac{13}{12}\pi$.

d) Wir haben $\mathrm{Re}(i\bar{z}) = -\mathrm{Im}(\bar{z}) = \mathrm{Im}(z)$, so dass $\mathrm{Im}(z) = 2$. Zusammen mit $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ bekommen wir $z = 2+2i$.

e) $z^2 = 2 - i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)\right) \Rightarrow |z^2| = 4, \quad \arg(z) = \dfrac{5}{3}\pi.$

Daraus folgt

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \pi\right)\right) = \sqrt{3} - i.$$

3. (*10 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. falsch
2. richtig
3. falsch
4. falsch

b) Eigenvektoren der Matrix A_1 sind v_1 mit Eigenwert -1 und v_3 mit Eigenwert 2. Eigenvektoren der Matrix A_2 sind v_2 mit Eigenwert 5 und v_3 mit Eigenwert 5.

c) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = (-2-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda)-2) = (-2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1),$$

also hat die Matrix einen doppelten Eigenwert -2 und einen einfachen Eigenwert 1.

d) Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Die Lösung ist $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 2, -1)^T$. Also gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

e) Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & | & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & | & b_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & | & b_3 \end{pmatrix}.$$

Also hat das Gleichungssystem eine Lösung für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

4. (*10 Punkte*)

a) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ mit Nullstellen bei $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Daher ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{2t} + be^t,\ a, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Es gilt

$$x(t) = ae^{2t} + be^t = e^t(ae^t + b). \tag{1}$$

Der Faktor e^t im Produkt auf der rechten Seite geht gegen $+\infty$ für $t \to +\infty$. Der Faktor $(ae^t + b)$ geht gegen $+\infty$ falls $a > 0$, gegen $-\infty$ falls $a < 0$ und ist konstant gleich b falls $a = 0$. Daraus ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a > 0 \text{ oder } (a = 0, b > 0), \\ -\infty, & \text{falls } a < 0 \text{ oder } (a = 0, b < 0), \\ 0, & \text{falls } (a = 0, b = 0). \end{cases}$$

c) Wir verwenden den Ansatz $x(t) = ce^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x} + 2x = ce^{-t} + 3ce^{-t} + 2ce^{-t} = 6ce^{-t},$$

somit $c = 1$. Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch

$$x_{part}(t) = e^{-t},\ t \in \mathbb{R}.$$

d) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist laut (c) und (d)

$$x(t) = e^{-t} + ae^{2t} + be^t,\ a, b, t \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $x(0) = 1$ liefert $1 + a + b = 1$, während wir aus der Bedingung $\dot{x}(0) = -3$ die Gleichung $-1 + 2a + b = -3$ erhalten. Somit gilt $a = -2$ und $b = 2$. Die gesuchte Lösung ist also

$$x(t) = e^{-t} - 2e^{2t} + 2e^t,\ t \in \mathbb{R}.$$

5. (*5 Punkte*)

a) Der Gradient von f ist

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{2x(x^2 - 2x + 3) - x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 3)^2}, -y \right) \\ &= \left(\frac{-2x(x - 3)}{(x^2 - 2x + 3)^2}, -y \right). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Gradienten liegen bei

$$\boxed{u_1 = (0, 0) \quad \text{und} \quad u_2 = (3, 0).}$$

Die Hesse-Matrix von f lautet:

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{(-4x+6)\cdot(x^2-2x+3)^2-(-2x^2+6x)\cdot 2(x^2-2x+3)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^4} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2(2x-3)(x^2-2x+3)^2+4x(x-3)(x^2-2x+3)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^4} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für u_1 und u_2:

$$\boxed{H_f(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Die Hesse-Matrix in u_1 ist indefinit und somit handelt es sich um einen Sattelpunkt. Die Hesse-Matrix in u_2 ist negativ definit und somit liegt ein lokales Maximum vor. (Da f nach oben beschränkt ist, handelt es sich in u_2 um ein globales Maximum.)

b) Die Gleichung der Nebenbedingung lautet

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren muss für die Extremalstellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f unter der Nebenbedingung g zusätzlich gelten dass

$$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = (2x, 2) - \lambda(2x, 2y) = 0.$$

Die Extremalstellen liegen in

$$(x_1, y_1) = (0, 1) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2) = (0, -1).$$

Die Auswertung der Funktion f in den Extremalstellen zeigt, dass für $f(x_1, y_1) = 2$ ein Maximum und für $f(x_2, y_2) = -2$ ein Minimum vorliegt.

6. (*5 Punkte*)

a) Vierteleinheitskreis im 1. Quadranten, positiv orientiert.

b) Mit der Substitution (bei I_1) $x = \cos t, dx = -\sin t dt$ und $y = \sin t, dy = \cos t dt$ folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} -xy\, dx + x^2\, dy = \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin^2 t + \cos^3 t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin(\pi/2) = 1. \\ I_2 &= \int_{\gamma_2} -xy\, dx + x^2\, dy = 0. \\ I_3 &= \int_{\gamma_3} -xy\, dx + x^2\, dy = 0. \end{aligned}$$

c)

$$I = \int_\gamma -xy\,dx + x^2\,dy = I_1 = 1.$$

d) Aus dem Satz von Green folgt

$$I = \int_\gamma -xy\,dx + x^2\,dy = 3\int\int x dx dy = 3\int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = 3 \cdot 1 \cdot 1/3 = 1.$$