Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2018**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST
Lösung zur Prüfung Mathematik I/II

---

1. a) (i) Die Ableitung ist mit Kettenregel $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

(ii) Es gilt $T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Daher $a_0 = f(0) = 0$, $a_1 = f'(0) = 0$ und

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{2-2x^2}{2(x^2+1)^2}\bigg|_{x=0} = 1.$$

b) (i) Um die Fixpunkte zu bestimmen, müssen wir die Gleichung $\dfrac{2x}{x^2+1} = x$ lösen. Umgeformt erhalten wir $x(x^2-1) = 0$ mit den drei Lösungen $x = 0, \pm 1$.

(ii) Es gilt die Konvergenz, wenn ein Fixpunkt attraktiv ist, und es gilt die Konvergenz nicht, wenn die Funktion abstossend ist. Ein Fixpunkt p ist attraktiv, falls $|g'(p)| < 1$ und ist abstossend, falls $|g'(p)| > 1$. Wir berechnen $g'(x) = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ und somit $g'(0) = 2$, $g'(1) = 0$ und $g'(-1) = 0$. Darum: **(C)** Für zwei.

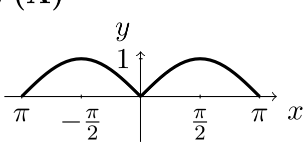
(iii) Wir suchen, a und b so, dass $g' > 0$ auf dem Intervall gilt. Das heisst wegen (ii)

$$0 < g'(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2},$$

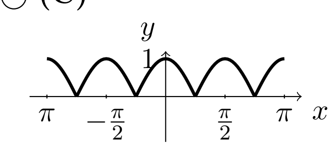
das gilt genau dann, wenn $x^2 < 1$ oder umformuliert $-1 < x < 1$, also $a = -1$, $b = 1$.

c) (i) Mit dem Hinweis haben wir $h(x) = |\cos(x)|$.

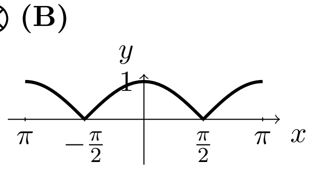
○ **(A)**



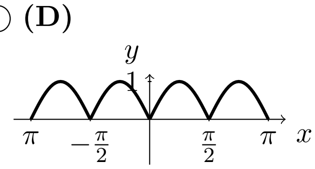
○ **(C)**



⊗ **(B)**



○ **(D)**



(ii) Mit dem Hinweis aus (i) haben wir $h(x) = |\cos(x)|$. Bemerke, dass $\cos(x) \geq 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Daher

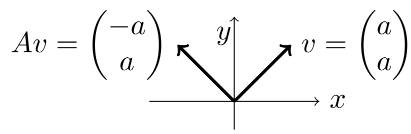
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.$$

2. **a)** Es ist $\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{\overline{z}_0}{|z_0|^2}$. Damit (Konjugation) liegt der gesuchte Punkt im ersten Quadrant, da z_0 im 4. liegt. Ferner $\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z_0|} > 1$, da $|z_0| < 1$. Deswegen ist **(A)** korrekt.

b) Sei $z_2 = a + bi$, mit $\mathrm{Re}(z_2) = a$ und $\mathrm{Im}(z_2) = b$.
Dann haben wir $a^2 + b^2 = 1$, $-1 = \tan(-\frac{\pi}{4}) = \frac{b}{a}$ und drittens $a > 0, b < 0$.

Es folgen $b = -a$ und $2a^2 = 1$. Da $a > 0$, die einzige Lösung ist $\mathrm{Re}(z_2) = a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ und folglich $\mathrm{Im}(z_2) = b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Alternative: Die Multiplikation ist hier die Drehung um $\dfrac{\pi}{4}$ im Uhrzeigersinn auf dem Kreis mit Radius 1, also in negativer Richtung, d.h. $z_2 = e^{-\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.



c) $A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und darum $Av = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$.

d) Multiplikation eines Vektor mit B entspricht der Drehung um φ in die positive Richtung. Aus der Abbildung ergibt sich $\varphi = \dfrac{5}{4}\pi$.

e) Es gilt $\det(EF) = \det(E) \cdot \det(F) = b \cdot 2$ und damit für (i) $b = 1009$.

(ii)

richtig	**falsch**	
⊗	○	Für $b \in \mathbb{R}$ ist $\det(EF)$ auch eine reelle Zahl. *Richtig, weil* $\det(EF) = 2b$.
○	⊗	Es gilt hier $EF = FE$. *Falsch,* $EF = diag(-2, -b, 1)$, *aber* $FE = diag(-b, -2, 1)$.
⊗	○	Die Produktmatrix EF ist eine Diagonalmatrix. *Richtig,* $EF = diag(-2, -b, 1)$.
○	⊗	Für $b \neq 0$ ist $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Es ist* $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
○	⊗	Für $b > 0$ reell, ist das Produkt der Eigenwerte von EF eine negative reelle Zahl. *Falsch,* $EF = diag(-2, -b, 1)$ *und daher sind die EWe von* EF -2, $-b$ *und* 1. *Das Produkt ist also* $2b > 0$ *falls* $b > 0$.
⊗	○	Für $b > 0$ reell, ist die Summe der Eigenwerte von EF eine negative reelle Zahl. *Richtig,* $EF = diag(-2, -b, 1)$ *und daher sind die EWe von* EF -2, $-b$ *und* 1. *Die Summe ist also* $-b - 1 < 0$ *falls* $b > 0$.
⊗	○	Ist λ ein Eigenwert von E, so ist λ^2 ein Eigenwert von EF. *Richtig, denn die EWe von* E *sind* $\pm i\sqrt{b}$ *und* 1 *und die EWe von* EF *sind* -2, $-b$ *und* 1.

f) (i) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(C - \lambda E_3) = \lambda^2(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda+i)(\lambda-i).$$

Davon lesen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$ ab.

(ii) Es gibt hier unterschiedliche Lösungsansätze, Beispiele:

1. Die drei EW $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$ sind paarweise voneinander verschieden. Damit sind drei EV $v_2, v_{\pm i}$ zu den entsprechenden EW linear unabhängig. Jeder Startvektor v_0 kann geschrieben werden als $v_0 = \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_{-i} + \alpha_3 v_i$. Da $Cv_2 = 2v_2$, muss $\alpha_1 = 0$ gelten also $v_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jetzt folgt durch direkte Rechnung (4-mal Matrix-Vektor-Produkt) $v_0 = v_4$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Oder sei zum Beispiel $v_{\pm i} = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist $v_0 = v_i + v_{-i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$C^4 v_0 = C^4(v_i + v_{-i}) = C^4 v_i + C^4 v_{-i} = i^4 v_i + (-i)^4 v_{-i} = v_i + v_{-i} = v_0.$$

2. Wir suchen Eigenvektoren von $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Diese sind Linearkombinationen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit von der Form $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $v \neq 0$.

3. Es ist auch erlaubt, einen Vektor v_0 zu raten, aber es muss dann $v_1 = Cv_0$ etc berechnet werden, sodass am Ende $v_4 = v_0$ ist.

3. a) Wir sehen, dass es die stationäre Lösung bei $y = 3$ gibt. Dass heisst $0 = -2 \cdot 3 + b$, also $b = 6$.

b) Es gilt $y'(x) = 0$ für $y = 2$ oder $y = 4$. Diese entsprechen den stationären Lösungen.

Die zweite Ableitung berechnen wir mit der DGL: $y'' = y'(y-4) + (y-2)y' = 2y'(y-3)$. Das heisst $y'' = 0$ genau dann, wenn $y = 2; 3; 4$. Einen Wendepunkt gibt es also bei $y = 3$. Auf $y \in]2, 4[$ ist $y' < 0$ und die Lösungskurve streng monoton fallend, die Lösung hat also einen Wendepunkt dann, wenn $y_0 \in [3, 4[$.

Die Angabe $y_0 = 3$ galt auch als richtig.

c) Wir berechnen die Konstante C für die unterschiedlichen Anfangsbedingungen:

$(x_0, y_0) = (1, 1)$ ergibt $1 = \frac{1}{5+C}$ und $C = -4$. $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ergibt $2 = \frac{1}{5+C}$ und $C = -4.5$. $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ergibt $1 = \frac{1}{20+C}$ und $C = -19$. $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ergibt $1 = \frac{1}{0+C}$ und $C = 1$. Bemerke, dass die Funktion $y(x) = \frac{1}{5x^2+C}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist genau dann, wenn $C > 0$. Deswegen:

○ **(A)** $(x_0, y_0) = (1, 1)$

○ **(B)** $(x_0, y_0) = (1, 2)$

○ **(C)** $(x_0, y_0) = (2, 1)$

⊗ **(D)** $(x_0, y_0) = (0, 1)$

d) Mit Trennung der Variablen erhalten wir $\frac{dy}{y^2} = -6x dx$.

Nach Integration ergibt das $\frac{-1}{y} = -3x^2 - C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Nach y aufgelöst bekommen wir die allgemeine Lösung $y = \dfrac{1}{3x^2 + C}$ und mit $y(0) = 1$ ist $C = 1$ und $y(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 1}$.

e) Die erste Zeile ist $y_1' = 2y_1 + 2y_2$, die zweite Zeile ist $y_2' = -\frac{1}{2}y_1 + 4y_2$. Aus der ersten Zeile erhalten wir $y_2 = \frac{1}{2}y_1' - y_1$ und $y_2' = \dfrac{1}{2}y_1'' - y_1'$.

Das in die zweite Zeile eingesetzt ergibt $\frac{1}{2}y_1'' - y_1' = -\frac{1}{2}y_1 + 4\left(\frac{1}{2}y_1' - y_1\right)$ oder vereinfacht die Gleichung $y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 0$.

Alternative: Bestimme Koeffizienten mit Formel $-6 = -(2 + 4)$ und $9 = \det$ der Matrix und berechne die Lösung.

f) (i) Die Gleichung hat charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ mit doppelter Nullstelle $\lambda_{1,2} = -2$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

(ii) Berechne die Ableitung von y: $\big((C_1 + C_2 x)e^{-2x}\big)' = e^{-2x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)$
Die partikuläre Lösung erhalten wir, indem wir die Konstanten C_1, C_2 aus dem folgenden Gleichungssystem berechnen;

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0} &= 1 \\ (C_2 - 2C_1 - 2C_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0} &= 0 \end{aligned}$$

oder vereinfacht

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ (C_2 - 2C_1) &= 0. \end{aligned}$$

Das ergibt $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ und $y(x) = (1 + 2x)e^{-2x}$.

4. a) (i) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(1,2) &= 3 - 4 + 4 - 10 - 1 = -8 \\ f(1,0) &= 3 - 0 + 4 - 0 - 1 = 6 \\ f(-1,-1) &= 3 - 1 - 4 + 5 - 1 = 2 \\ f(-1,2) &= 3 - 4 - 4 - 10 - 1 = -16 \end{aligned}$$

und deswegen: **(B)** $(1,0)$

(ii) Wir berechnen $f_x(x,y) = 6x + 4$ und $f_y(x,y) = -2y - 5$. Die einzige gemeinsame Nullstelle ist $(x_0, y_0) = (-\frac{2}{3}, -\frac{5}{2})$. Weiterhin ist $D = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 = -12 < 0$, und es liegt bei (x_0, y_0) also ein Sattelpunkt vor.

- ⊗ **(A)** Keines.
- ○ **(B)** Genau eines.
- ○ **(C)** Genau zwei.
- ○ **(D)** Genau drei.

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$a = h_x(1,1) = 9x^2 + 1|_{x=1} = 10 \text{ und } b = h_y(1,1) = -4y - 2|_{y=1} = -6.$$

c) (i) $B = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\}$

(ii) $C = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, -1+x \le y \le 1-x\}$

(iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\iint_C k(x,y)dA &= \int_0^1 \int_{-1+x}^{1-x} (1-y)dydx = \int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=-1+x}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 1 - x - \frac{(1-x)^2}{2} - (-1+x) + \frac{(-1+x)^2}{2} dx \\ &= \int_0^1 (2-2x)dx = 1.\end{aligned}$$

Alternative: Es ist $\iint_C k(x,y)dA = \iint_C (1-y)dA = \iint_C 1\,dA - \iint_C y\,dA$ mit $\iint_C 1\,dA = 1$ als Flächeninhalt und $\iint_C y\,dA = 0$ wegen der Symmetrie. Also zusammen wieder 1.

5. **a)** Falls $x = 0$ stehen die Pfeile horizontal und haben mit y übereinstimmendem Vorzeichen. Das schliesst bereits **(A)**, **(B)** und **(C)** aus.

- ○ **(A)** $K(x,y) = (-x,y)$
- ○ **(B)** $K(x,y) = (x,-y)$
- ○ **(C)** $K(x,y) = (-y,x)$
- ⊗ **(D)** $K(x,y) = (y,-x)$

b) $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ist konservativ genau dann, wenn $Q_x = P_y$ für alle x, y. Wir berechnen $Q_x = ye^{y^2} + xy$ und $P_y = 2aye^{y^2} + 2axy$. Es folgt $Q_x = P_y$ für alle x, y für $a = \frac{1}{2}$.

c) (i) Die Kurven in **(A)** und **(B)** fangen nicht in $(0,-1)$ an. Die Kurve in **(D)** endet nicht in $(1,0)$.

- ○ **(A)** $\gamma_2(t) = (t-1, t-1)$, $t \in [1,2]$
- ○ **(B)** $\gamma_2(t) = (1-t, t)$, $t \in [0,1]$
- ⊗ **(C)** $\gamma_2(t) = (1+t, t)$, $t \in [-1,0]$
- ○ **(D)** $\gamma_2(t) = (t, t-1)$, $t \in [0,2]$

(ii) **Eine Möglichkeit** von mehreren ist

$$-\gamma_1(t) = (\cos(-t), \sin(-t)), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

d) Sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + 2xy \\ -y^2 + a \cdot y \end{pmatrix}$. Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ die Kurve in der (x,y)-Ebene, die zusammengesetzt ist aus den Kurven γ_1, γ_2 und γ_3, wie in Teilaufgabe **c)**.

(i) Nennen wir das eingeschlossene Gebiet B. Nach dem Satz von Gauss gilt dann

$$\oint_\gamma K \cdot n \, ds = \iint_B \operatorname{div} K dA = \iint_B (8 + 2y - 2y + a) dA = (8 + a) \iint_B 1 dA = \lambda(B) \cdot (8 + a)$$

wobei $\lambda(B)$ das Flächeninhalt von B bezeichnet. Es soll also $\lambda(B) \cdot (8+a) = 0$. Da $\lambda(B) \neq 0$, $8 + a = 0$ und darum $a = -8$.

(ii) Ähnlich wie in der vorherigen Teilaufgabe erhalten wir $\lambda(B) \cdot (8 + a) = \pi + 2$.
Es ist $\lambda(B) = \frac{\pi}{2} + 1$ (Fläche Halbkreis plus Fläche Dreieck).
Das ergibt $a = -6$.

e) Bemerke, dass K konservativ ist und Potential $f = x^2 + y^2$ hat, das heisst, $\nabla f = K$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung gilt daher

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma = f(3, 6) - f(0, 1) = 44.$$

Alternative: Wähle eine einfache Verbindung der Punkte, z.B. gradlinig, und berechne das Kurvenintegral.