Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 Der Grenzwert $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\cdot x}{\frac{\pi}{2}-x}$ ist gegeben durch

(A) $-\frac{\pi}{2}$.

(B) -1.

(C) **TRUE:** $\frac{\pi}{2}$.

(D) 1.

Lösung:

Ref: Mathe1-MC3-5 & Wi21-1a

Wir verwenden l'Hôspital und bekommen

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\cdot x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\sin(x)x}{-1} = \frac{\pi}{2}.$$

1.MC2 Seien $a\in\mathbb{R}$ und f eine Funktion definiert für $x<0$ durch $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^4-16} & \text{für } x\neq -2, \\ a & \text{für } x=-2. \end{cases}$

Für welches a ist f stetig an der Stelle -2?

(A) $a=\frac{1}{4}$

(B) $a=-\frac{1}{16}$

(C) **TRUE:** $a=-\frac{1}{32}$

(D) $a=\frac{1}{24}$

Lösung:

Ref: Mathe1-MC3-8

Es muss gelten, dass (wir verwenden l'Hôspital für den Limes)

$$a = \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{x^4-16} = \lim_{x\to-2} \frac{1}{4x^3} = -\frac{1}{32}.$$

1.MC3 Gegeben sei f mit $f(x) = \sqrt{x-7}$. Wie lautet die Gleichung der Tangente $y = ax + b$ an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 16$?

(A) **TRUE:** $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

(B) $y = \frac{1}{6}x + 3$

(C) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(D) $y = \frac{1}{3}x + 3$

Lösung:

Ref: Mathe1-MC4-4

Wir berechnen $f(x_0) = 3$ und $f'(x_0) = (2\sqrt{x_0 - 7}) = \frac{1}{6}$. Die Tangente ist also $y(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 16) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$.

1.MC4 Sei h die Funktion mit $h(x) = x(\ln(x) + 2)$ und $x > 0$. Wie viele Fixpunkte hat h?

(A) 0

(B) **TRUE:** 1

(C) 2

(D) 3

Lösung:

$h(x) = x$ vereinfacht sich zu $ln(x) = -1$ (da $x > 0$ gilt), was die eindeutige Lösung $\tilde{x} = e^{-1}$ hat.

1.MC5 Seien a und d Zahlen, und sei f die Funktion mit $f(x) = \dfrac{ax^2}{x^2 + d}$.

Welches Paar a und d garantiert, dass $\tilde{x} = 2$ ein attraktiver Fixpunkt ist? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe $\tilde{x} = 2$ konvergiert gegen 2.

(A) $a = 1$ und $d = -2$

(B) **TRUE:** $a = 3$ und $d = 2$

(C) $a = 4$ und $d = 3$

(D) $a = 5$ und $d = 6$

Lösung:

Da 2 ein FP ist muss gelten $f(2) = 2$ was sich zu $d + 4 = 2a$ vereinfacht. Damit es ein attraktiver FP ist muss $|f'(2)| < 1$ gelten. Wir berechnen $f'(2)$ und setzen die erste Bedingung ein um $f'(2) = 2 - \frac{8}{a}$ zu erhalten. Nur die Wahl $a = 3$, $d = 2$ erfüllt beide Bedingungen.

1.MC6 Für welche obere Integralgrenze e^b gilt $\displaystyle\int_{e^2}^{e^b} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(3)$?

(A) $b = 3$
(B) $b = 4$
(C) $b = 5$
(D) **TRUE:** $b = 6$

Lösung:

Ref: Wi21-1b-ii

Wir berechnen

$$\ln(3) = \int_{e^2}^{e^b} \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln(x))]_{e^2}^{e^b} = \ln(b) - \ln(2) = \ln(b/2),$$

also muss $b = 6$ gelten.

1.MC7 Sei F eine Funktion definiert durch $F(x) = -\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^x t \cdot \sin(t)\, dt$.

Welchen Wert hat $F(\pi)$?

(A) $F(\pi) = -\dfrac{\pi}{2}$
(B) $F(\pi) = 0$
(C) **TRUE:** $F(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$
(D) $F(\pi) = \pi$

Lösung:

Wir berechnen mit partieller Integration

$$F(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} t \cdot \sin(t)\, dt = -\frac{\pi}{2} - [t \cdot \cos(t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(t)\, dt = -\frac{\pi}{2} + \pi + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

1.MC8 Sei f eine Funktion mit $f(1) = 0$, $f'(1) = e^2$ und $f''(1) = 3e^2$. Sei $T_2(x)$ das Taylor-Polynom zweiten Grades dieser Funktion f **an der Stelle** $x_0 = 1$.

Mit Koeffizienten A_0, A_1 und A_2 schreiben wir $T_2(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$. Bestimmen Sie den Koeffizienten A_1.

(A) $A_1 = e^2$
(B) $A_1 = 4e^2$
(C) **TRUE:** $A_1 = -2e^2$
(D) $A_1 = -5e^2$

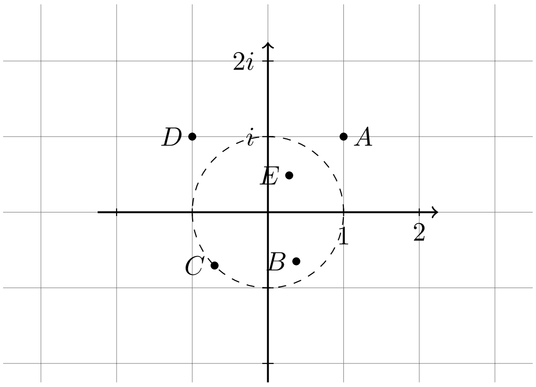
Lösung:

Es gilt $T_2(x) = 0 + e^2(x-1) + \frac{3}{2}e^2(x-1)^2 = e^2(\frac{5}{2} - 2x + \frac{3}{2}x^2)$.

Zusätzliche Info: Es sind $f(x) = \ln(x)e^{2x}$, $f'(x) = \frac{1}{x}e^{2x} + \ln(x)2e^{2x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2}e^{2x} + \frac{4}{x}e^{2x} + \ln(x)4e^{2x}$

Aufgabe 2

2.MC1 Betrachten Sie die Zahlen A bis E in der komplexen Zahlenebene.



Welche der folgenden Gleichungen passt dazu? **Hinweis:** Ausschlussverfahren.

(A) $D^3 = A$

(B) **TRUE:** $C^3 = -\overline{C}$

(C) $B^2 = E$

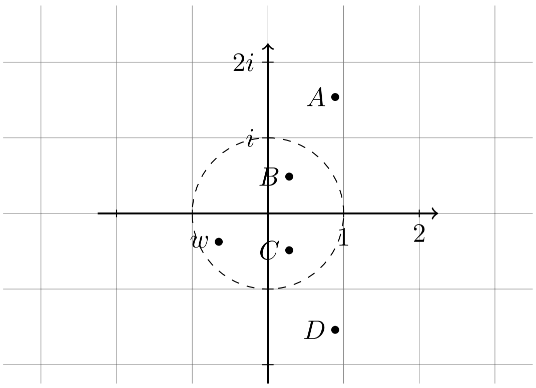
(D) $A^{-3} = C$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC1-8.

Man sieht leicht, dass $|D^3| > |D| = |A|$, $\arg(B^2) \neq \arg(E)$ und $|A^{-3}| < 1 = |C|$.

2.MC2 Betrachten Sie die Zahlen A bis D und w in der komplexen Zahlenebene.



Welcher der Buchstaben A bis D entspricht der komplexen Zahl w^{-2}? **Hinweis:** Wie oben.

(A) A
(B) B
(C) C
(D) **TRUE:** D

Lösung:

4. Ref: Mathe2-MC1-1&7

Es gilt $|w^{-2}| > 1$ daher kommen nur A und D in Frage. Es ist $\arg(w^{-1}) \in [\pi/2, \pi]$ daher $\arg((w^{-1})^2) \in [\pi, 2\pi]$, was für A nicht gilt.

2.MC3 Gegeben seien zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 mit $z_1 + z_2 = 4$ und $z_1 \cdot z_2 = 7$. Welche der folgenden Gleichungen ist korrekt?

(A) $\mathrm{Re}(z_1)^2 = 2$
(B) $\mathrm{Re}(z_1)^2 = 3$
(C) **TRUE:** $\mathrm{Im}(z_1)^2 = 3$
(D) $\mathrm{Im}(z_1)^2 = 2$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC1-3

Einsetztn der ersten in die zweite Gleichung liefert

$$z_1(4 - z_1) = 7 \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 + 7 = 0$$

was die Lösungen $z_1 = \frac{4\pm\sqrt{16-28}}{2} = 2 \pm i\sqrt{3}$ hat. Insbesondere gilt $\mathrm{Im}(z_1)^2 = 3$.

2.MC4 Es ist $\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{11} = \dots$

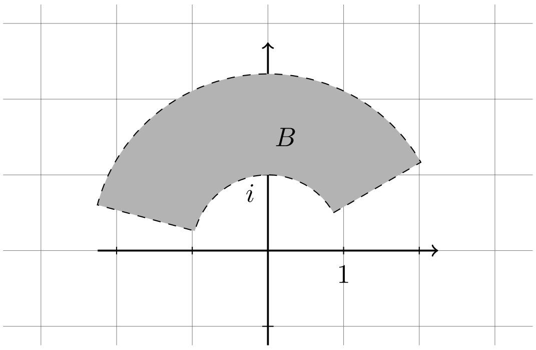
(A) $2^{11}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.
(B) $2^{22}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.
(C) **TRUE:** $2^{21}(-\sqrt{3} + i)$.
(D) 2^{22}.

Lösung:

Erklärung: $\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{11} = (4e^{-\frac{5\pi}{6}i})^{11} = 2^{22}e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2^{21}(-\sqrt{3} + i)$. Ref: Mathe2-MC1-6.

2.MC5 Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B (Rand **nicht** enthalten) in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < r < \frac{7}{3}, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{11\pi}{12} \right\}.$$



Seien $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}$ und $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Welche der folgenden Zahlen liegt in B?

(A) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(B) $z_1 \cdot z_2$

(C) $z_1 + z_2$

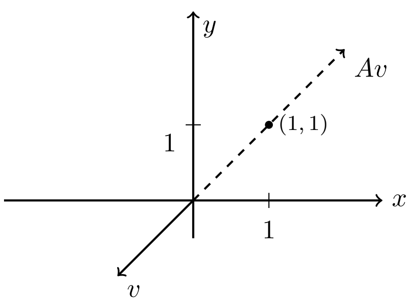
(D) **TRUE:** $z_1 - z_2$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC2-4&5.

Erklärung:
$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3} = \frac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ und $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$.
Daher gilt $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}e^{i\frac{13\pi}{12}} \notin B$ (wegen zu großem Argument),
$z_1 \cdot z_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}} \notin B$ (wegen zu kleinem Betrag),
$z_1 + z_2 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{2i}{3} \notin B$ (wegen negativem Imaginärteil) und
$z_1 - z_2 = -\frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{4i}{3} \in B$ mit $|z_1 - z_2|^2 = \frac{9+6\sqrt{3}+3+16}{9} \in]\frac{34}{9}, \frac{40}{9}[\subset]1^2, (\frac{7}{3})^2[$ und $\arg(z_1 - z_2) \in]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}[$ (einfacher mit geometrischen Überlegungen).

2.MC6 Welche Matrix A passt zu folgendem Bild ?



(A) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Vektoren v und Av liegen auf der Winkelhalbierenden $x = y$.

Daher muss $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ ein EV sein. Das ist nur bei ii. der Fall.

2.MC7 Sei $D_b = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \pi \\ b & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von $b \in \mathbb{R}$ hat D_b mindestens einen Eigenwert, der **nicht reell** ist?

(A) $b = -\frac{5}{6}$

(B) $b = 0$

(C) $b = \frac{4}{3}$

(D) **TRUE:** $b = \frac{5}{3}$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC2-6.

Erklärung:

$$\begin{aligned} \det(D_b - \lambda \cdot E_3) &= (1-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + 3b(-2-\lambda) \\ &= (-2-\lambda)\left[(1-\lambda)(-3-\lambda) + 3b\right] \\ &= (-2-\lambda)\left[\lambda^2 + 2\lambda + 3(b-1)\right] \end{aligned}$$

Also gibt es nicht reellwertige Eigenwerte falls $4 - 12(b-1) < 0$, also falls $b > \frac{4}{3}$.

2.MC8 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Diese definiert eine Entwicklung $v_{n+1} = A \cdot v_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 192 \end{pmatrix}$ ein Startvektor. Welcher Vektor ist dann v_6?

(A) $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(D) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 192 \end{pmatrix}$

Lösung:

Ref: Mathe1-Serie 12

Es gilt $Av_0 = \frac{1}{2}v_0$, also ist v_0 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\frac{1}{2}$. Damit gilt $v_6 = A^6 v_0 = (\frac{1}{2})^6 v_0 = \frac{1}{64} v_0$.

2.A1 [4 Punkte] Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

Lösung:

Ausrechnen mit Sarrus oder Laplace ergibt $\det(D_b) = 2b + 18$.

(ii) Bestimmen Sie alle b, sodass D_b invertierbar ist.

Lösung:

Wir verwenden, dass D_b invertierbar ist genau dann wenn die Determinante $\neq 0$ ist. Daher folgt aus i. dass D_b invertierbar ist für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$.

(iii) Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des Linearen Gleichungssystems $D_b \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von b: Für welche b gibt es Lösungen? Für welche b sind diese eindeutig?

Lösung:

Ein homogenes LGS hat immer die triviale Lösung $x = 0$, also gibt es für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Falls $b \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$ haben wir gesehen, dass D_b invertierbar ist, und daher ist die Lösung $x = 0$ eindeutig. Für $b = -9$ gibt es einen Eigenvektor zum Eigenwert 0, der somit einen eindimensionalen Lösungsraum aufspannt (mit unendlich vielen Lösungen).

Aufgabe 3

3.MC1 Sei $y(x) = C \cdot e^{-3 \cdot x} - 2$ die Lösung einer Differentialgleichung mit $y_0 = y(0) = 2$.

Bestimmen Sie den Wert $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right)$.

(A) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -3$

(B) **TRUE:** $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -1$

(C) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -2$

(D) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -18$

Lösung:

Aus $2 = y(0) = C - 2$ folgt $C = 4$. Daher $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = 1 - 2 = -1$.

3.MC2 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = (2 - y(x)) \cdot (6 - y(x))$ und $y(0) = y_0$. Für welchen Wert y_0 ist die Lösungskurve streng monoton fallend?

(A) $y_0 = 0$

(B) $y_0 = 2$

(C) **TRUE:** $y_0 = 5$

(D) $y_0 = 8$

Lösung:

Die Fixpunkte ($y' = 0$) sind an den Stellen $y = 2$ und $y = 6$, y' ist positiv für $y \in]-\infty, 2[\cup]6, \infty[$ und negativ für $y \in]2, 6[$.

3.MC3 Sei $y'(x) = (y(x)+7)(y(x)-4)(y(x)+5)$. Für die Lösung y mit $y(0) = 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ldots$

(A) -7.

(B) **TRUE:** -5.

(C) 0.

(D) 4.

Lösung:

Es gibt drei stationäre Lösungen $y_{\infty,1} = -7$, $y_{\infty,2} = -5$ und $y_{\infty,3} = 4$. Der Anfangswert ist $-5 < y(0) = 0 < 4$, und die Ableitung zwischen -5 und 4 ist negativ, daher konvergiert die Lösung des AWPs gegen -5.

3.MC4 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = -(y(x) + 3)(y(x) - 1)$ und $y(0) = y_0$. Für welches y_0 hat der Graph der Lösung für $x \geq 0$ **genau einen** Wendepunkt?

(A) $y_0 = -4$

(B) **TRUE:** $y_0 = -2$

(C) $y_0 = 2$

(D) $y_0 = 0$

Lösung:

Es gilt $y'(x) = 0$ für $y(x) = -3$ oder $y(x) = 1$. Diese entsprechen den stationären Lösungen.

Die zweite Ableitung berechnen wir mit der DGL (und Produktregel):

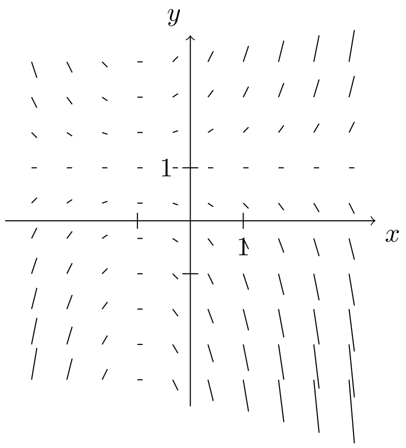
$$y'' = (y')' = -y'(y-1) - (y+3)y' = -2y'(y+1).$$

Das heisst $y'' = 0$ genau dann, wenn $y = -3, -1, 1$. Einen Wendepunkt gibt es also bei $y = -1$, da die beiden stationären Lösungen aussscheiden.

Auf $y \in]-3, 1[$ ist $y' > 0$ und die Lösungskurve in diesem Streifen streng monoton steigend, die Lösung hat also einen Wendepunkt, wenn sie unterhalb von -1 startet, also $-3 < y_0 < -1$.

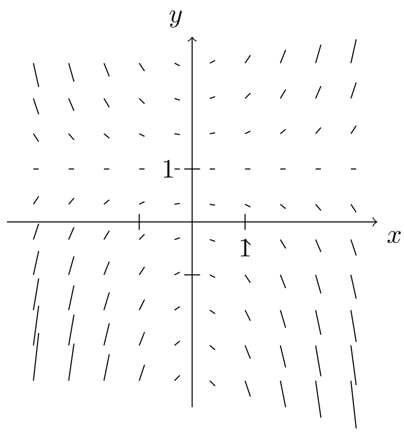
3.MC5 Welches Richtungsfeld passt zu $y'(x) = \frac{3}{4}(x+1)(y(x)-1)$?

(A)



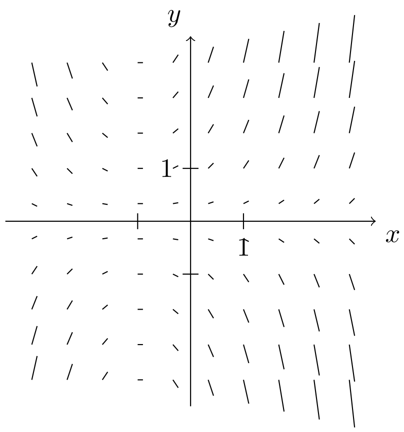
TRUE:

(B)



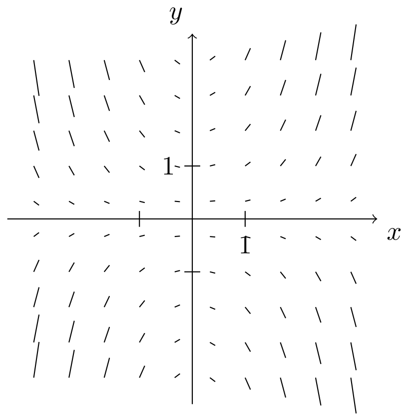
FALSE:

(C)



FALSE:

(D)



FALSE:

Lösung:

Für $x = -1$ und für $y = 1$ gilt jeweils $y' = 0$, also sind an diesen Stellen die Richtungslinien parallel zur x-Achse.

3.MC6 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ definiert das DGL-System $y' = Ay$. Für welches X ist

$$\left\{ t \to y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

eine Lösung dieses Systems?

(A) $X = -3$
(B) $X = 1$
(C) **TRUE:** $X = 2$
(D) $X = 0$

Lösung:

Es muss gelten, dass $\begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix}$ ein EV von A ist. Wir berechnen daher

$$A \begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8X - 20 \\ 5X - 30 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda = \frac{1}{2}X - 3$ was wir in die erste Gleichung einsetzten um $8X - 20 = X(\frac{1}{2}X - 3)$ zu bekommen. Das ist äquivalent zu $\frac{1}{2}X^2 - 11X + 20 = 0$ mit den Nullstellen $X_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 40}}{1} = 11 \pm 9$, also $X_1 = 2$ und $X_2 = 20$.

Alternative: Man setzt die 4 gegeben Werte für X ein und rechnet nach, dass $\begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix}$ nur für $X = 2$ ein EV von A ist (zum EW $\lambda_1 = -2$).

3.MC7 Sei $y' = Ay$ das DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}$.

Für welchen Wert von α hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\alpha = -4$
(B) $\alpha = -2$
(C) $\alpha = 2$
(D) **TRUE:** $\alpha = 4$

Lösung:

Es muss $\det A = 0$ gelten, was für $\alpha = 4$ der Fall ist.

3.MC8 Für $a \in \mathbb{R}$ sei $y''(x) + a \cdot y'(x) + 9y(x) = 0$.

Für welches a definiert $y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-3x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(A) $a = -6$

(B) $a = -3$

(C) $a = 3$

(D) **TRUE:** $a = 6$

Lösung:

Das charakteristischen Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 9$. Aus der gegebenen Lösung folgt, dass -3 eine doppelte Nullstelle des Polynoms sein muss, also $p(\lambda) \stackrel{!}{=} (\lambda+3)^2$, woraus $a = 6$ folgt.

3.A1 [6 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = 2xy^2(x)$.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

Lösung:

Um die Variablen zu trennen schreiben wir zunächst $\dfrac{dy}{y^2} = 2xdx$

Nun integrieren wir beide Seiten bezüglich der dort auftretenden Variablen,

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2xdx$$

und erhalten sodann

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C.$$

Durch Auflösen nach y ergibt sich

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

(ii) Sei y die Lösung mit $y(2) = y_2$. Welche Bedingung muss y_2 erfüllen, damit die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

Lösung:

Es muss gelten, dass $C > 0$. Einsetzen von $y(2) = y_2$ ergibt $y_2 = -\frac{1}{4+C}$ woraus wir C berechnen können als

$$C = -\frac{1}{y_2} - 4.$$

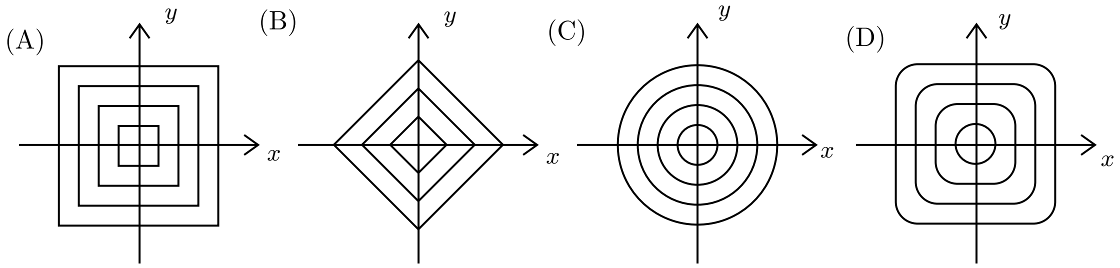
Die Bedingung $C > 0$ impliziert also

$$\frac{1}{y_2} < -4$$

was erfüllt ist für $y_2 \in]-\frac{1}{4}, 0[$.

Aufgabe 4

4.MC1 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = |x| + |y|$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (oder Höhenlinien) der Funktion f?



Lösung:

B

4.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_a(x, y) = 28 - x(ax+3) - (y-a)^2$. Für welches a ist $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{8}, 12\right)$ ein kritischer Punkt von g_a?

(A) $a = 3$

(B) $a = \frac{1}{8}$

(C) **TRUE:** $a = 12$

(D) $a = 8$

Lösung:

Der Gradient ist $\nabla g_a(x, y) = (-2ax - 3,\ -2(y - a))$. Am Punkt (x_0, y_0) muss dieser null sein, also $\nabla g_a(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}a - 3,\ -24 + 2a) = (0, 0)$.

Somit $a = 12$.

4.MC3 Für die Funktion g_a aus Aufgabenteil **4.MC2** sei nun $a = 6$: Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x, y) = 23 + bx + 2y$$

die Tangentialebene von g_6 an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 5)$?

(A) $b = -5$

(B) $b = 2$

(C) $b = 12$

(D) **TRUE:** $b = -15$

Lösung:

Wir beginnen mit dem Gradienten $\nabla g_6(x,y) = (-12x-3,\ -2(y-6))$.

Dann ist $\nabla g_6(1,5) = (-15,\ 2)$. Als nächstes benötigen wir $g_6(1,5) = 18$. Mit der allgemeinen Gleichung für die Tangentialebene folgt dann

$$l(x,y) = 18 - 15(x-1) + 2(y-5) = 23 - 15x + 2y.$$

Somit ist $b = -15$ richtig. Alternativ setze $g_6(1,5) = 18 = l(1,5)$ und löse nach b auf.

4.MC4 Die Tangentialebene aus Aufgabenteil **4.MC3** schneidet die z-Achse in einem Punkt. Bestimmen Sie die z-Koordinate dieses Schnittpunktes.

(A) **TRUE:** 23

(B) 28

(C) 18

(D) 0

Lösung:

Hierzu müssen wir nur $(x,y) = (0,0)$ in die Tangentielebenengleichung einsetzen und erhalten 23.

4.MC5 Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^4 - 4xy - 7y^2$.

Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 1?

(A) $(x,y) = (1,2)$

(B) $(x,y) = (-1,-2)$

(C) **TRUE:** $(x,y) = (2,1)$

(D) $(x,y) = (-2,1)$

Lösung:

Setze die Punkte ein und rechne den Funktionswert aus.

4.MC6 Sei h die Funktion aus Aufgabenteil **4.MC5**.

Sei γ die Niveaukurve von h in der (x,y)-Ebene, auf der $P = (2,0)$ liegt. Welche Steigung hat die Tangente an γ in P?

(A) -2

(B) -4

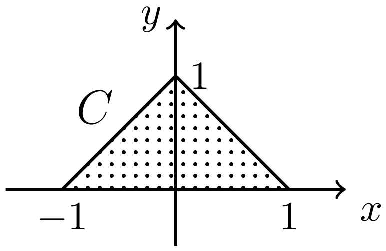
(C) **TRUE:** 4

(D) 2

Lösung:

Verwende Implizite Differentiation für die korrekte Antwort 4.

4.MC7 Gegeben sei das Gebiet C:



Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt von C?

(A) $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{1-x} dy\,dx$

(B) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y} dx\,dy$

(C) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} dy\,dx$

(D) **TRUE:** $\int_{0}^{1}\int_{y-1}^{1-y} dx\,dy$

Lösung:

Ergibt sich mit der richtigen Beschreibung von C. Alternativ lassen sich die Integrale schnell berechnen.

4.MC8 Sei $\widetilde{C}$ nur die rechte Hälfte von C aus Aufgabenteil **4.MC7**, das heisst, es muss $x \geq 0$ sein.

Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $\iint_{\widetilde{C}} (2y + K)\,dA = \frac{11}{6}$?

(A) $K = 1$

(B) $K = 2$

(C) **TRUE:** $K = 3$

(D) $K = 4$

Lösung:

Wir berechnen

$$\iint_{\widetilde{C}} 2y + K\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2y + K\,dx\,dy = \int_0^1 \left[2xy + Kx\right|_0^{1-y} dy\ .$$

Damit ist dann

$$\iint_{\widetilde{C}} 2y + K\,dA = \int_0^1 2y(1-y) + K(1-y)\,dy = \left[\frac{2-K}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 + Ky\right|_0^1\ .$$

Durch einsetzen der Grenzen erhalten wir dann

$$\iint_{\widetilde{C}} 2y + K\,dA = \frac{2-K}{2} - \frac{2}{3} + K \overset{!}{=} \frac{11}{6}.$$

Nun erhalten wir die Antwort $K = 3$ durch lösen der Gleichung nach K.

4.A1 [4 Punkte] Sei die Menge

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \right\},$$

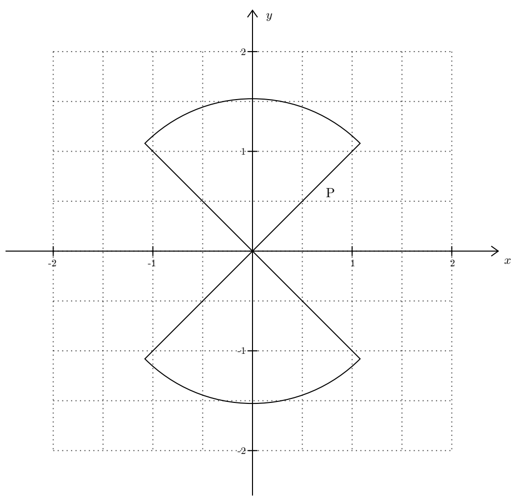
wobei

- $r \in \left[0, \sqrt{\ln(10)}\right]$,
- $\varphi \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ oder $\varphi \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$

gelten soll.

(i) Skizzieren Sie die Menge P in das Koordinatensystem in Ihrem Antwortheft.

Hinweis: In Ihrer Skizze können Sie $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$ verwenden.
Lösung:



(ii) Berechnen Sie $I = \iint_P e^{x^2+y^2}\,dA$.

Hinweis: Rechnen Sie dabei mit exakten Werten und nicht mit $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$!
Lösung:

Mit der Parametrisierung berechnen wir

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{\sqrt{\ln 10}} e^{(r^2)} r\,drd\varphi + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^{\sqrt{\ln 10}} e^{(r^2)} r\,drd\varphi.$$

Es ist $\int_0^{\sqrt{\ln 10}} e^{r^2} r\,dr = \frac{1}{2}\left[e^{(r^2)}\right|_0^{\sqrt{\ln 10}} = \frac{9}{2}$. Damit berechnen wir dann

$$I = 2\frac{2}{4}\pi\frac{9}{2} = \frac{9}{2}\pi\ .$$

Aufgabe 5

5.MC1 Für $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} cx + y \\ dx + 3y \end{pmatrix}$.

Das Vektorfeld K soll konservativ sein **und** die Divergenz $\operatorname{div}(K) = 2$ haben. Für welches Paar c und d ist das der Fall?

(A) $c = 3$ und $d = 1$

(B) $c = 5$ und $d = 2$

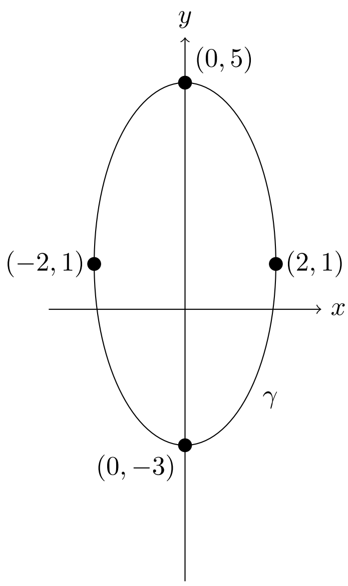
(C) **TRUE:** $c = -1$ und $d = 1$

(D) $c = 0$ und $d = 0$

Lösung:

Ergibt sich mit dem Kriterium $Q_x = P_y$ für konservativ und $\operatorname{div}(K) = P_x + Q_y$ für $K = (P, Q)$.

5.MC2 Welche der folgenden Parametrisierungen $\gamma(t)$ von γ passt zu diesem Bild?



(A) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$

(B) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(t)}{2} \\ \frac{\cos(t)-1}{4} \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$

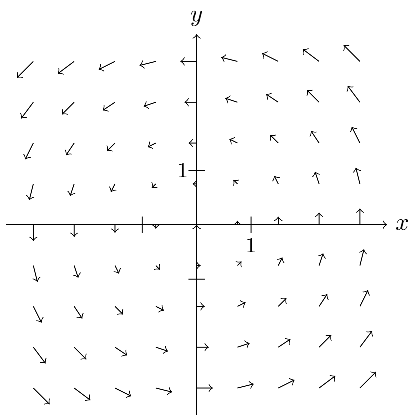
(C) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{4} + \cos(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

(D) **TRUE:** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 1 + 4\cos(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

Lösung:

Setze z.B. Punkte ein. Dies war bis Vertauschen x und y eine MC in einer Serie.

5.MC3 Welches Vektorfeld K mit $K(x, y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

(B) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

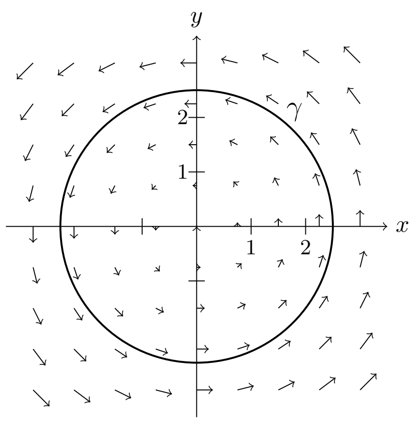
(C) **TRUE:** $K(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

(D) $K(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

Lösung:

Setze z.B. Punkte auf der x- oder y-Achse ein und beachte, welche Pfeilrichtungen passen.

5.MC4 In dem Vektorfeld aus **5.MC3** ist ein Kreis γ gegeben.



Sei $y' = Ay$ ein DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert von c ist γ eine Lösungskurve des Systems?

(A) $c = -2$

(B) $c = -1$

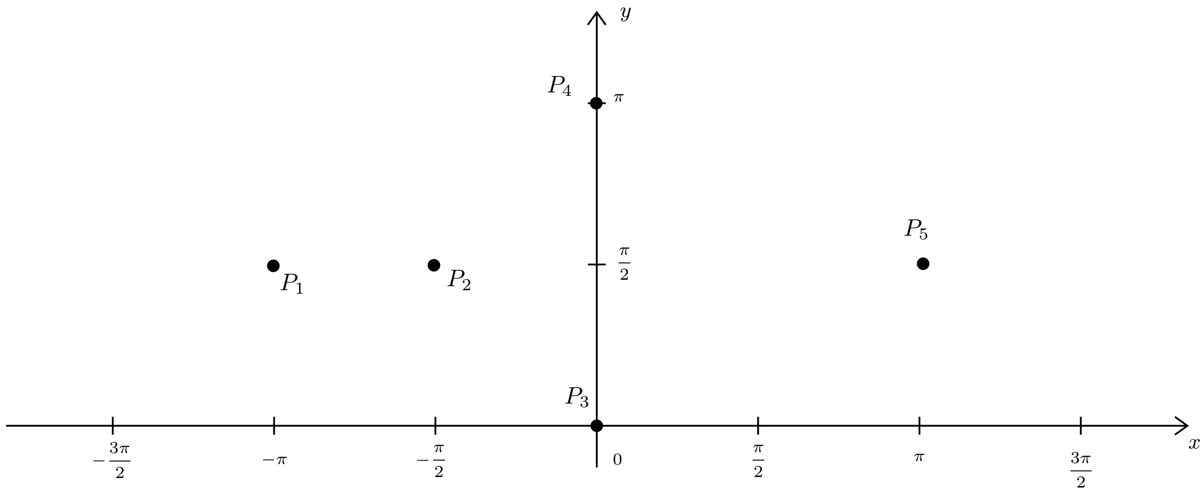
(C) **TRUE:** $c = 1$

(D) $c = 2$

Lösung:

Die EW von A müssen rein imaginär sein. Wegen des Vektorfeldes kann es nur $c = 1$ sein.

5.MC5 Gegeben seien das Vektorfeld $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x-y) + 2 \\ -\sin(x-y) + 4 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ in der Ebene.



Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt P_1, die dann über P_2 und P_4 im Punkt P_5 endet. Dann ist die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma = \ldots$

(A) **TRUE:** 4π.

(B) 0.

(C) π.

(D) 4.

Lösung:

Durch genaues Hinschauen ist $k(x, y) = -\cos(x-y) + 2x + 4y + C$ mit C Integrationskonstante eine Potententialfunktion. Die Arbeit der Kurve zwischen $P_1 = (-\pi, \frac{1}{2}\pi)$ und $P_5 = (\pi, \frac{1}{2}\pi)$ ist dann $k(P_5) - k(P_1)$. Wir berechnen also $k(P_5) = 4\pi + C$ und $k(P_1) = C$, also $k(P_5) - k(P_1) =$

4π.

5.MC6 Betrachten Sie erneut das Vektorfeld K und die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ aus Aufgabenteil **5.MC5**. Für welchen Kurvenverlauf wird die Arbeit minimal?

(A) **TRUE:** Von P_1 nach P_2 nach P_4 nach P_5 und P_3

(B) Von P_1 nach P_2 nach P_3 nach P_5 und P_4

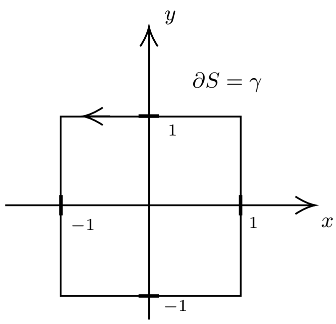
(C) Von P_1 nach P_4 nach P_5 nach P_3 und P_2

(D) Von P_1 nach P_4 nach P_3 nach P_2 und P_5

Lösung:

Mit der Berechnung der Potentialfunktion brauchen wir nur das Potential der Endpunkte vergleichen.

5.MC7 Sei das Quadrat S wie unten dargestellt. Die Randkurve $\partial S = \gamma$ wird wie angegeben durchlaufen.



Das Vektorfeld $K_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K_a(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + 2y + 4xy^2 \\ -2a(y^3 + 3y) \end{pmatrix}$ hängt von $a \in \mathbb{R}$ ab. Für welches a ist der Fluss von innen nach aussen gleich 16?

Das heisst, es ist $\oint_\gamma K_a \cdot n\, ds = 16$. Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

(A) **TRUE:** $a = \dfrac{2}{3}$

(B) $a = \dfrac{1}{6}$

(C) $a = 16$

(D) $a = 4$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Divergenz in Abhängigkeit von a, diese ist

$$\operatorname{div}(K_a) = 8 + 4y^2 - 6ay^2 - 6a = 8 + (4 - 6a)y^2 - 6a.$$

Nun ist nach dem Satz von Gauss

$$\oint_\gamma K_a \cdot n\, ds = \iint_S \operatorname{div}(K_a)\, dx\, dy = \iint_S 8 + (4-6a)y^2 - 6a\, dx\, dy.$$

Wir suchen a so, dass $\operatorname{div}(K_a) = 8 + (4-6a)y^2 - 6a$ konstant ist. Denn dann können wir diese Konstante vor das Gebietsintegral ziehen und erhalten das Produkt dieser Konstante mit den Flächeninhalt des Quadrats S. Es muss $(4-6a) = 0$ sein. Also $a = \frac{2}{3}$. Dann ist in der Tat

$$\oint_\gamma K_a \cdot n\, ds = 4 \iint_S 1 dx\, dy = 4 \cdot 4 = 16.$$

5.MC8 Das Vektorfeld $\widetilde{K_b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{K_b}(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + by + 4xy^2 \\ -2(y^3 + 3y) \end{pmatrix}$ hängt von $b \in \mathbb{R}$ ab.

Wir nehmen an, dass die Kurve γ aus **5.MC7** den Punkt $(1,0)$ als Anfangs- und als Endpunkt hat. Für welches b ist dann das Arbeitsintegral $\oint_\gamma \widetilde{K_b} \cdot d\gamma = 8$?

(A) $b = 8$

(B) $b = 4$

(C) **TRUE:** $b = -2$

(D) $b = -1$

Lösung:

Wir schreiben das Vektorfeld $\widetilde{K_b}$ in der Notation

$$\widetilde{K_b} = (P, Q)$$

mit

$$P(x,y) = 8x + by + 4xy^2 \quad \text{und} \quad Q(x,y) = -2(y^3 + 3y).$$

Laut der Formel von Green ist dann (mit der richtigen Orientierung)

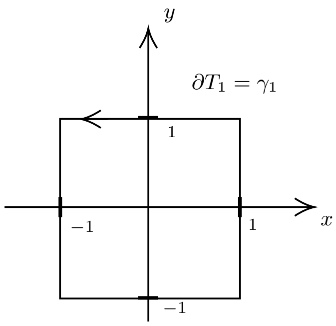
$$\oint_\gamma \widetilde{K_b} \cdot d\gamma = \iint_S (Q_x - P_y)\, dA = -\iint_S (b + 8xy)\, dA\ .$$

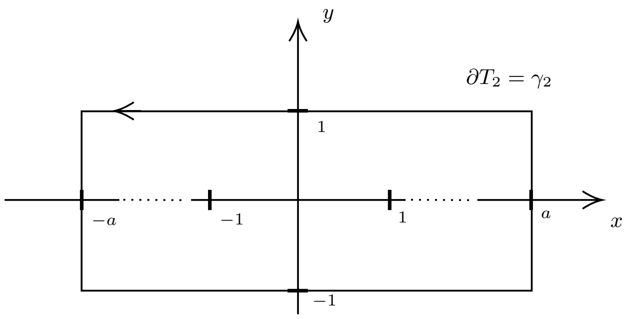
Nun zur Berechnung des rechten Integrals, dieses ist

$$\begin{aligned} -\iint_S (b + 8xy)\, dA &= -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (b + 8xy)\, dx\, dy \\ &= -4 \cdot b - 8 \int_{-1}^{1} x\, dx \int_{-1}^{1} y\, dy \\ &= -4 \cdot b \end{aligned}$$

Da die letzten Integrale symmetrisch sind und damit Null. Nun folgt, dass $b = -2$ sein muss.

5.A1 [3 Punkte] Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $K(x,y) = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x - 7y \end{pmatrix}$. Wir betrachten die Gebiete T_1 mit Randkurve $\partial T_1 = \gamma_1$ und T_2 mit Randkurve $\partial T_2 = \gamma_2$ wie in den folgenden Abbildungen (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt T_2 von $a > 0$ ab.





Berechnen Sie a so, dass die Differenz des Flusses von innen nach aussen durch die jeweilige Randkurve genau 80 ist, das heisst $\oint_{\gamma_1} K \cdot n\, ds - \oint_{\gamma_2} K \cdot n\, ds = 80$. Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

Lösung:

Mit dem Satz von Gauss. Es ist $\operatorname{div}(K) = 5 - 7 = -2$ konstant! Dann folgt

$$\oint_{\gamma_1} K \cdot n\, ds = -\iint_{T_1} 2\, dA = -2 \cdot (\text{Fläche von } T_1) = -8,$$

denn die Fläche von T_1 ist 4. Mit der analogen Überlegung ist

$$\oint_{\gamma_2} K \cdot n\, ds = -\iint_{T_1} 2\, dA = -2 \cdot (\text{Fläche von } T_2) = -8 \cdot a,$$

denn die Fläche von T_2 ist $4a$. Also ist

$$\oint_{\gamma_1} K \cdot n\, ds - \oint_{\gamma_2} K \cdot n\, ds = 8(a-1).$$

Somit $8(a-1) = 80$ nach Aufgabenstellung. Auflösen nach a gibt nun $a = 11$.

5.A2 [3 Punkte] Gegeben sei die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie für $g(x,y) = \sqrt{2y}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma g(x,y)\, ds$.

Lösung:

Es ist $\gamma'(t) = (1,t)$ und somit $|\gamma'(t)| = \sqrt{(1+t^2)}$. Mit der Definition des Kurvenintegrals und der Substitution $u = 1 + t^2$ ist dann

$$\int_\gamma g(x,y)\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)\ .$$