D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0292-00J (Jahreskurs)

Nachname
PO

Vorname
GE

Legi-Nr.
XX-345-678

Prüfungs-Nr.
001

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgabe 1

1.MC1 Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)\cdot x}{\frac{\pi}{2}-x}$ ist gegeben durch

(A) 1.

(B) $\dfrac{\pi}{2}$.

(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.

(D) -1.

1.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und f eine Funktion definiert für $x < 0$ durch $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^4-16} & \text{für } x \neq -2, \\ a & \text{für } x = -2. \end{cases}$

Für welches a ist f stetig an der Stelle -2?

(A) $a = \dfrac{1}{4}$

(B) $a = -\dfrac{1}{32}$

(C) $a = -\dfrac{1}{16}$

(D) $a = \dfrac{1}{24}$

1.MC3 Gegeben sei f mit $f(x) = \sqrt{x-7}$. Wie lautet die Gleichung der Tangente $y = ax + b$ an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 16$?

(A) $y = \dfrac{1}{3}x + 3$

(B) $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$

(C) $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}$

(D) $y = \dfrac{1}{6}x + 3$

1.MC4 Sei h die Funktion mit $h(x) = x(\ln(x) + 2)$ und $x > 0$. Wie viele Fixpunkte hat h?

(A) 2

(B) 3

(C) 0

(D) 1

1.MC5 Seien a und d Zahlen, und sei f die Funktion mit $f(x) = \dfrac{ax^2}{x^2+d}$.

Welches Paar a und d garantiert, dass $\widetilde{x} = 2$ ein attraktiver Fixpunkt ist? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe $\widetilde{x} = 2$ konvergiert gegen 2.

(A) $a = 5$ und $d = 6$

(B) $a = 4$ und $d = 3$

(C) $a = 1$ und $d = -2$

(D) $a = 3$ und $d = 2$

1.MC6 Für welche obere Integralgrenze e^b gilt $\displaystyle\int_{e^2}^{e^b} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(3)$?

(A) $b = 6$

(B) $b = 3$

(C) $b = 5$

(D) $b = 4$

1.MC7 Sei F eine Funktion definiert durch $F(x) = -\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^x t \cdot \sin(t)\,dt$.

Welchen Wert hat $F(\pi)$?

(A) $F(\pi) = \pi$

(B) $F(\pi) = -\dfrac{\pi}{2}$

(C) $F(\pi) = 0$

(D) $F(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$

1.MC8 Sei f eine Funktion mit $f(1) = 0$, $f'(1) = e^2$ und $f''(1) = 3e^2$. Sei $T_2(x)$ das Taylor-Polynom zweiten Grades dieser Funktion f **an der Stelle** $x_0 = 1$.

Mit Koeffizienten A_0, A_1 und A_2 schreiben wir $T_2(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$. Bestimmen Sie den Koeffizienten A_1.

(A) $A_1 = 4e^2$

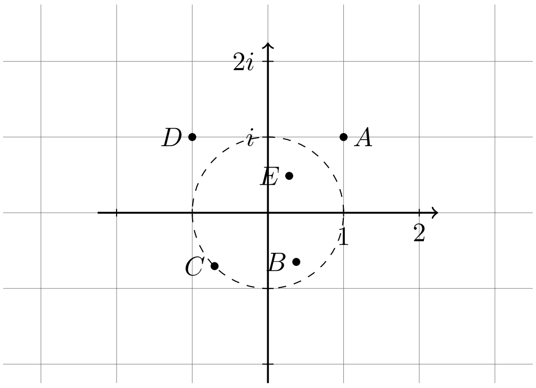
(B) $A_1 = -2e^2$

(C) $A_1 = -5e^2$

(D) $A_1 = e^2$

Aufgabe 2

2.MC1 Betrachten Sie die Zahlen A bis E in der komplexen Zahlenebene.



Welche der folgenden Gleichungen passt dazu? **Hinweis:** Ausschlussverfahren.

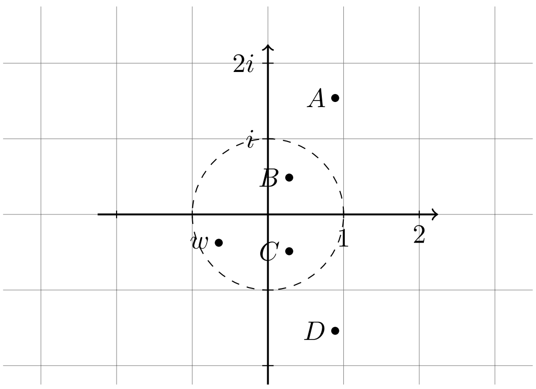
(A) $B^2 = E$

(B) $A^{-3} = C$

(C) $C^3 = -\overline{C}$

(D) $D^3 = A$

2.MC2 Betrachten Sie die Zahlen A bis D und w in der komplexen Zahlenebene.



Welcher der Buchstaben A bis D entspricht der komplexen Zahl w^{-2}? **Hinweis:** Wie oben.

(A) A

(B) B

(C) C

(D) D

2.MC3 Gegeben seien zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 mit $z_1 + z_2 = 4$ und $z_1 \cdot z_2 = 7$. Welche der folgenden Gleichungen ist korrekt?

(A) $\mathrm{Im}(z_1)^2 = 2$

(B) $\mathrm{Re}(z_1)^2 = 3$

(C) $\mathrm{Re}(z_1)^2 = 2$

(D) $\mathrm{Im}(z_1)^2 = 3$

2.MC4 Es ist $\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{11} = \dots$

(A) $2^{11} e^{\frac{5\pi}{6} i}$.

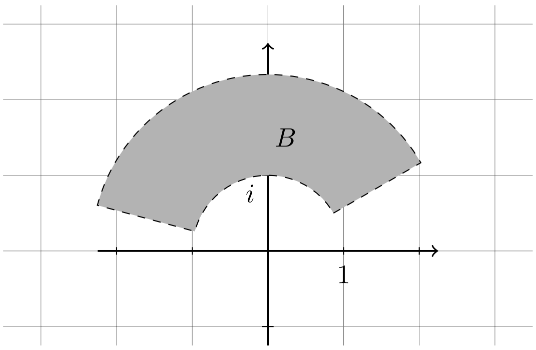
(B) $2^{21}(-\sqrt{3} + i)$.

(C) $2^{22} e^{-\frac{5\pi}{6} i}$.

(D) 2^{22}.

2.MC5 Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B (Rand **nicht** enthalten) in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < r < \frac{7}{3}, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{11\pi}{12} \right\}.$$



Seien $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}$ und $z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Welche der folgenden Zahlen liegt in B?

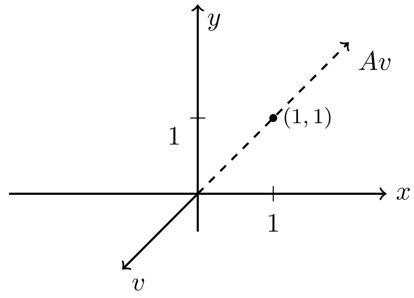
(A) $z_1 \cdot z_2$

(B) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(C) $z_1 + z_2$

(D) $z_1 - z_2$

2.MC6 Welche Matrix A passt zu folgendem Bild ?



(A) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2.MC7 Sei $D_b = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \pi \\ b & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von $b \in \mathbb{R}$ hat D_b mindestens einen Eigenwert, der **nicht reell** ist?

(A) $b = \frac{4}{3}$

(B) $b = -\frac{5}{6}$

(C) $b = \frac{5}{3}$

(D) $b = 0$

2.MC8 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Diese definiert eine Entwicklung $v_{n+1} = A \cdot v_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 192 \end{pmatrix}$ ein Startvektor. Welcher Vektor ist dann v_6?

(A) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(B) $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 192 \end{pmatrix}$

(D) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.A1 [4 Punkte] Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

(ii) Bestimmen Sie alle b, sodass D_b invertierbar ist.

(iii) Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des Linearen Gleichungssystems $D_b \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von b: Für welche b gibt es Lösungen? Für welche b sind diese eindeutig?

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1**.

Aufgabe 3

3.MC1 Sei $y(x) = C \cdot e^{-3 \cdot x} - 2$ die Lösung einer Differentialgleichung mit $y_0 = y(0) = 2$.

Bestimmen Sie den Wert $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right)$.

(A) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -2$

(B) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -18$

(C) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -1$

(D) $y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = -3$

3.MC2 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = (2 - y(x)) \cdot (6 - y(x))$ und $y(0) = y_0$.

Für welchen Wert y_0 ist die Lösungskurve streng monoton fallend?

(A) $y_0 = 8$

(B) $y_0 = 5$

(C) $y_0 = 2$

(D) $y_0 = 0$

3.MC3 Sei $y'(x) = (y(x)+7)(y(x)-4)(y(x)+5)$. Für die Lösung y mit $y(0) = 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ldots$

(A) -7.

(B) -5.

(C) 0.

(D) 4.

3.MC4 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = -(y(x) + 3)(y(x) - 1)$ und $y(0) = y_0$.

Für welches y_0 hat der Graph der Lösung für $x \geq 0$ **genau einen** Wendepunkt?

(A) $y_0 = 0$

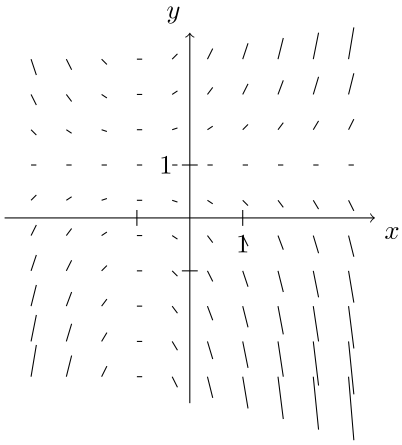
(B) $y_0 = -2$

(C) $y_0 = 2$

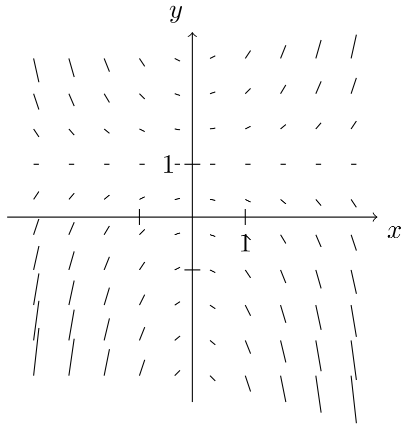
(D) $y_0 = -4$

3.MC5 Welches Richtungsfeld passt zu $y'(x) = \frac{3}{4}(x+1)(y(x)-1)$?

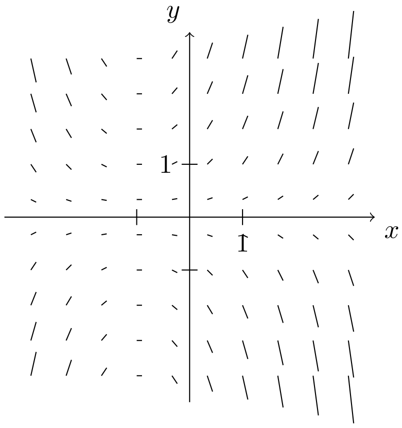
(A)



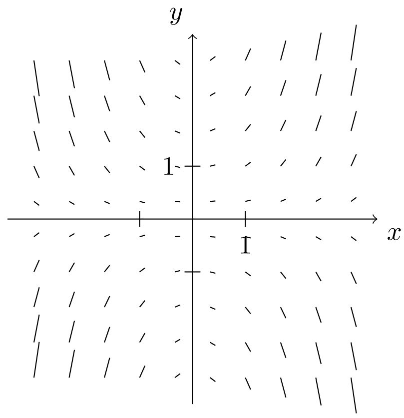
(B)



(C)



(D)



3.MC6 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ definiert das DGL-System $y' = Ay$. Für welches X ist

$$\left\{ t \to y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

eine Lösung dieses Systems?

(A) $X = -3$
(B) $X = 1$
(C) $X = 2$
(D) $X = 0$

3.MC7 Sei $y' = Ay$ das DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}$.

Für welchen Wert von α hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\alpha = -4$
(B) $\alpha = 2$
(C) $\alpha = 4$
(D) $\alpha = -2$

3.MC8 Für $a \in \mathbb{R}$ sei $y''(x) + a \cdot y'(x) + 9y(x) = 0$.

Für welches a definiert $y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-3x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(A) $a = 3$

(B) $a = -3$

(C) $a = 6$

(D) $a = -6$

3.A1 **[6 Punkte]** Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = 2xy^2(x)$.

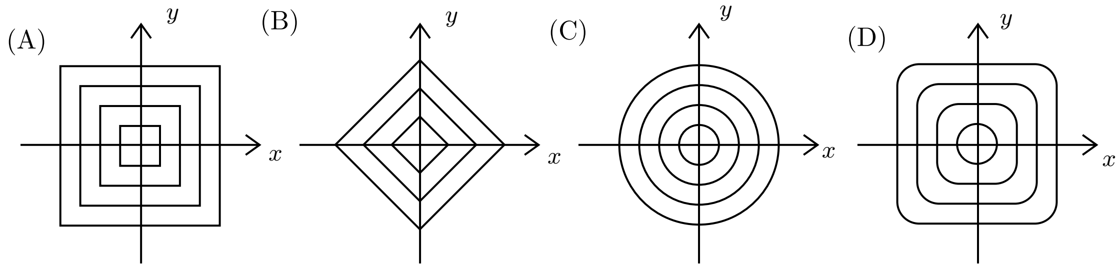
(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

(ii) Sei y die Lösung mit $y(2) = y_2$. Welche Bedingung muss y_2 erfüllen, damit die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1**.

Aufgabe 4

4.MC1 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = |x| + |y|$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (oder Höhenlinien) der Funktion f?



4.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_a(x, y) = 28 - x(ax+3) - (y-a)^2$. Für welches a ist $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{8}, 12\right)$ ein kritischer Punkt von g_a?

(A) $a = \frac{1}{8}$

(B) $a = 12$

(C) $a = 3$

(D) $a = 8$

4.MC3 Für die Funktion g_a aus Aufgabenteil **4.MC2** sei nun $a = 6$: Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x, y) = 23 + bx + 2y$$

die Tangentialebene von g_6 an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 5)$?

(A) $b = 12$

(B) $b = 2$

(C) $b = -15$

(D) $b = -5$

4.MC4 Die Tangentialebene aus Aufgabenteil **4.MC3** schneidet die z-Achse in einem Punkt. Bestimmen Sie die z-Koordinate dieses Schnittpunktes.

(A) 18

(B) 23

(C) 28

(D) 0

4.MC5 Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^4 - 4xy - 7y^2$.

Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 1?

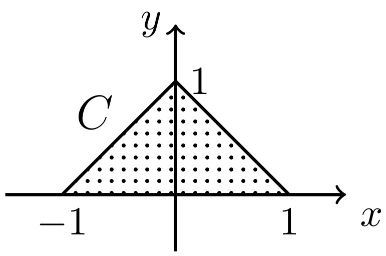
(A) $(x,y) = (-1,-2)$
(B) $(x,y) = (2,1)$
(C) $(x,y) = (1,2)$
(D) $(x,y) = (-2,1)$

4.MC6 Sei h die Funktion aus Aufgabenteil **4.MC5**.

Sei γ die Niveaukurve von h in der (x,y)-Ebene, auf der $P = (2,0)$ liegt. Welche Steigung hat die Tangente an γ in P?

(A) -2
(B) 2
(C) 4
(D) -4

4.MC7 Gegeben sei das Gebiet C:



Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt von C?

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{1-x} dy\,dx$
(B) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y} dx\,dy$
(C) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} dy\,dx$
(D) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y-1}^{1-y} dx\,dy$

4.MC8 Sei $\widetilde{C}$ nur die rechte Hälfte von C aus Aufgabenteil **4.MC7**, das heisst, es muss $x \geq 0$ sein.

Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $\iint_{\widetilde{C}} (2y + K)\, dA = \dfrac{11}{6}$?

(A) $K = 4$
(B) $K = 2$
(C) $K = 3$
(D) $K = 1$

4.A1 [**4 Punkte**] Sei die Menge

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \right\},$$

wobei

- $r \in \left[0, \sqrt{\ln(10)}\right]$,
- $\varphi \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ oder $\varphi \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$

gelten soll.

(i) Skizzieren Sie die Menge P in das Koordinatensystem in Ihrem Antwortheft.

Hinweis: In Ihrer Skizze können Sie $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$ verwenden.

(ii) Berechnen Sie $I = \iint_P e^{x^2+y^2}\, dA$.

Hinweis: Rechnen Sie dabei mit exakten Werten und nicht mit $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$!

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.

Aufgabe 5

5.MC1 Für $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} cx + y \\ dx + 3y \end{pmatrix}$.

Das Vektorfeld K soll konservativ sein **und** die Divergenz $\operatorname{div}(K) = 2$ haben. Für welches Paar c und d ist das der Fall?

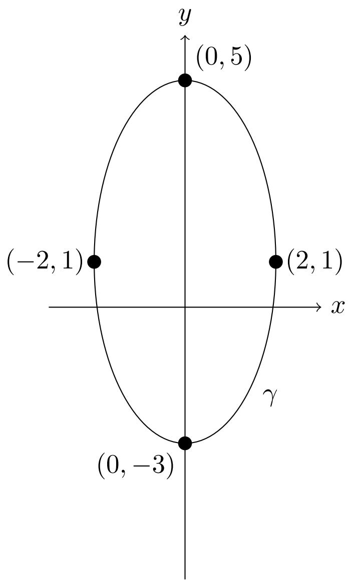
(A) $c = 3$ und $d = 1$

(B) $c = 5$ und $d = 2$

(C) $c = -1$ und $d = 1$

(D) $c = 0$ und $d = 0$

5.MC2 Welche der folgenden Parametrisierungen $\gamma(t)$ von γ passt zu diesem Bild?



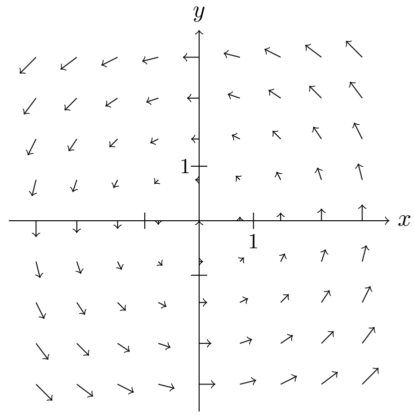
(A) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{4} + \cos(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

(B) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 1 + 4\cos(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

(C) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

(D) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(t)}{2} \\ \frac{\cos(t)-1}{4} \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

5.MC3 Welches Vektorfeld K mit $K(x, y)$ passt zu dieser Abbildung?



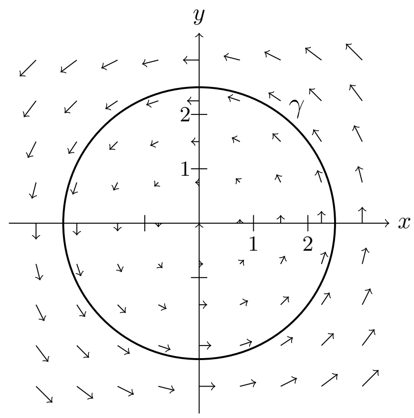
(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

(B) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

(C) $K(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

(D) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

5.MC4 In dem Vektorfeld aus **5.MC3** ist ein Kreis γ gegeben.

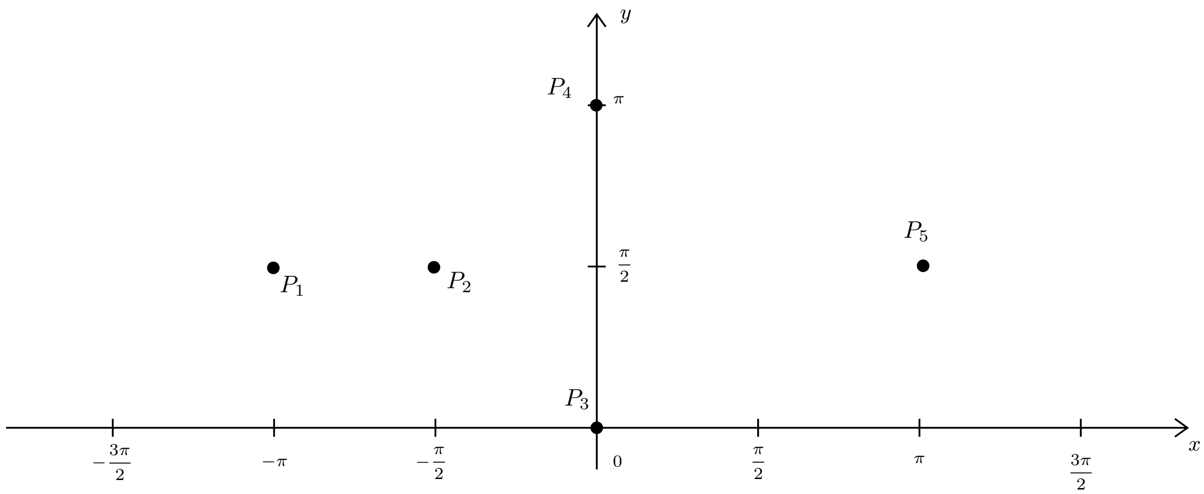


Sei $y' = Ay$ ein DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert von c ist γ eine Lösungskurve des Systems?

(A) $c = -1$
(B) $c = 2$
(C) $c = -2$
(D) $c = 1$

5.MC5 Gegeben seien das Vektorfeld $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x-y)+2 \\ -\sin(x-y)+4 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ in der Ebene.



Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt P_1, die dann über P_2 und P_4 im Punkt P_5 endet. Dann ist die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma = \ldots$

(A) 4π.

(B) 0.

(C) 4.

(D) π.

5.MC6 Betrachten Sie erneut das Vektorfeld K und die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ aus Aufgabenteil **5.MC5**.
Für welchen Kurvenverlauf wird die Arbeit minimal?

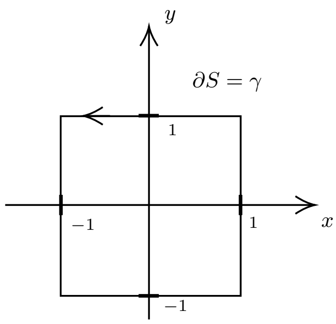
(A) Von P_1 nach P_2 nach P_4 nach P_5 und P_3

(B) Von P_1 nach P_4 nach P_5 nach P_3 und P_2

(C) Von P_1 nach P_2 nach P_3 nach P_5 und P_4

(D) Von P_1 nach P_4 nach P_3 nach P_2 und P_5

5.MC7 Sei das Quadrat S wie unten dargestellt. Die Randkurve $\partial S = \gamma$ wird wie angegeben durchlaufen.



Das Vektorfeld $K_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K_a(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + 2y + 4xy^2 \\ -2a(y^3 + 3y) \end{pmatrix}$ hängt von $a \in \mathbb{R}$ ab. Für welches a ist der Fluss von innen nach aussen gleich 16?

Das heisst, es ist $\oint_\gamma K_a \cdot n \, ds = 16$. Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

(A) $a = \dfrac{1}{6}$

(B) $a = 16$

(C) $a = \dfrac{2}{3}$

(D) $a = 4$

5.MC8 Das Vektorfeld $\widetilde{K_b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{K_b}(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + by + 4xy^2 \\ -2(y^3 + 3y) \end{pmatrix}$ hängt von $b \in \mathbb{R}$ ab.

Wir nehmen an, dass die Kurve γ aus **5.MC7** den Punkt $(1,0)$ als Anfangs- und als Endpunkt hat. Für welches b ist dann das Arbeitsintegral $\oint_\gamma \widetilde{K_b} \cdot d\gamma = 8$?

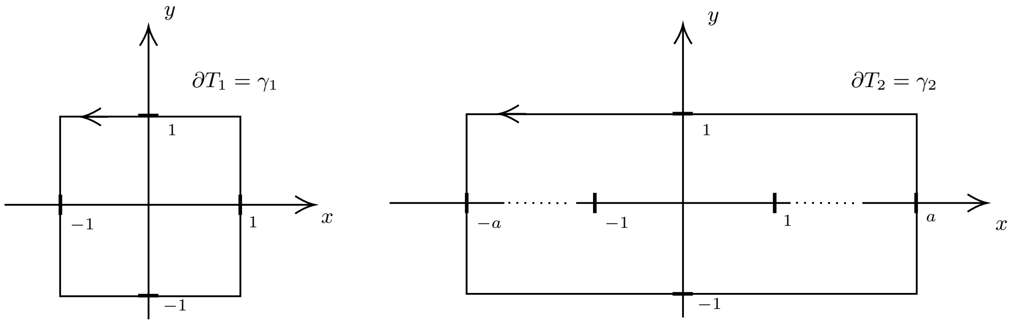
(A) $b = 4$

(B) $b = 8$

(C) $b = -1$

(D) $b = -2$

5.A1 [3 Punkte] Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $K(x,y) = \begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2x-7y \end{pmatrix}$. Wir betrachten die Gebiete T_1 mit Randkurve $\partial T_1 = \gamma_1$ und T_2 mit Randkurve $\partial T_2 = \gamma_2$ wie in den folgenden Abbildungen (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt T_2 von $a > 0$ ab.



Berechnen Sie a so, dass die Differenz des Flusses von innen nach aussen durch die jeweilige Randkurve genau 80 ist, das heisst $\oint_{\gamma_1} K \cdot n\, ds - \oint_{\gamma_2} K \cdot n\, ds = 80$. Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1**.

5.A2 [3 Punkte] Gegeben sei die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie für $g(x,y) = \sqrt{2y}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma g(x,y)\, ds$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A2**.