Aufgaben und Lösungsvorschlag
Gruppe A

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei f die Funktion mit $f(x) = \cos(x)(1-x) - 1$. Dann gilt für die Ableitung f'

(A) $f'(x) = (x-1)(\sin(x) - \cos(x))$

(B) $f'(x) = x\sin(x)$

(C) **TRUE:** $f'(x) = (x-1)\sin(x) - \cos(x)$

(D) $f'(x) = \sin(x) - x\cos(x)$

Lösung:

Mit der Produktregel folgt

$$f'(x) = (\cos(x))'(1-x) + \cos(x)(1-x)' = -\sin(x)(1-x) - \cos(x) = (x-1)\sin(x) - \cos(x).$$

1.MC2 [1 Punkt] Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\cos(x)(1-x)-1}$ ist ...

(A) -4

(B) 0

(C) 3

(D) **TRUE:** -2

Lösung:

Mit der Regel von de L'Hospital und der Ableitung oben ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\cos(x)(1-x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{(x-1)\sin(x) - \cos(x)} = -2.$$

1.MC3 [1 Punkt] Sei ℓ mit $\ell(x)$ die Tangente der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)(1-x^2)$ an der Stelle $x_0 = \pi$. Welches $\ell(x)$ unten gehört dazu?

Hinweis: Sie müssen dafür nicht zwingend Ableitungen berechnen.

(A) **TRUE:** $\ell(x) = (\pi^2 - 1)x + \pi - \pi^3$

(B) $\ell(x) = \pi^2 x + \pi + \pi^3$

(C) $\ell(x) = (\pi^2 - 1)x + \pi + \pi^3$

(D) $\ell(x) = \pi^2 x + \pi^3$

Lösung:

Es muss $\ell(\pi) = f(\pi) = 0$ gelten. Das ist nur der Fall für $\ell(x) = (\pi^2 - 1)x + \pi - \pi^3$.

Alternativ: Es gilt $f'(x_0) = \pi^2 - 1$.

Also ist $\ell(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = (\pi^2 - 1)(x - \pi) + 0 = (\pi^2 - 1)x + \pi - \pi^3$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $T_2(x) = 1 + x + a_2x^2$ das 2. Taylor-Polynom der Funktion f mit $f(x) = e^x - x^2$ an der Stelle $x_0 = 0$. Der Koeffizient a_2 ist

(A) **TRUE:** $a_2 = -\frac{1}{2}$

(B) $a_2 = -1$

(C) $a_2 = 1$

(D) $a_2 = \frac{1}{2}$

Lösung:

Es gilt $T_2(x) = f(0) + f'(\pi)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Mit $f'(x) = e^x - 2x$ und $f''(x) = e^x - 2$ folgt, dass $f'(0) = 1$ und $f''(0) = -1$. Damit ist $T_2(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2}$ und damit $a_2 = -\dfrac{1}{2}$.

1.MC5 [1 Punkt] Sei $f(x) = \dfrac{ax^2}{x^2 - 2}$. Für welches a ist $\widetilde{x} = 2$ ein Fixpunkt der zugehörigen Funktion f?

(A) **TRUE:** $a = 1$

(B) $a = \frac{1}{2}$

(C) $a = 2$

(D) $a = 0$

Lösung:

Es gilt $f(2) = 2$ genau dann, wenn $\dfrac{a(2)^2}{(2)^2 - 2} = 2 \iff a4 = 8 - 4 \iff a = 1$.

1.MC6 [1 Punkt] Sei $f(x) = ax(1 - x)$. Für welches a ist $\widetilde{x} = 0$ ein attraktiver Fixpunkt der zugehörigen Funktion f? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe bei $\widetilde{x} = 0$ konvergiert gegen $\widetilde{x} = 0$.

(A) $a = 2$

(B) Es gibt kein solches a.

(C) $a = 3$

(D) **TRUE:** $a = \frac{1}{2}$

Lösung:

Es muss $|f'(0)| < 1$ gelten. Da $f'(x) = a(1-x) - ax$ ist, muss also

$$|f'(0)| = |a(1-0) + a0| = |a| < 1$$

gelten. Also ist $a = \frac{1}{2}$ die korrekte Antwort.

1.MC7 [1 Punkt] Sei $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt$. Dann ist $F(4) = \ldots$

(A) 1

(B) **TRUE:** $\ln(2)$

(C) $\dfrac{1}{\ln(2)}$

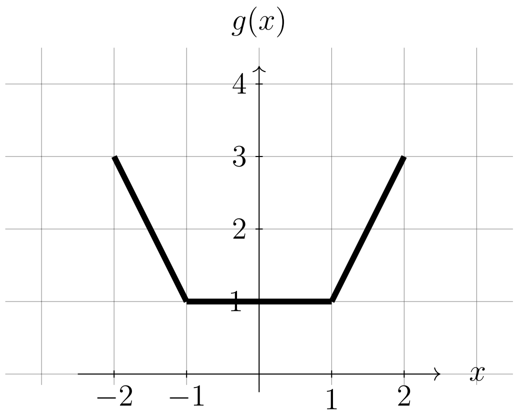
(D) 2

Lösung:

Es gilt

$$F(4) = \int_2^4 \frac{1}{t} dt = \Big[\ln(t)\Big]_{t=2}^{t=4} = \ln(4) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln(2).$$

1.MC8 [1 Punkt] Sei g die Funktion mit $g(x) = |x-1| + |x+1| - 1$ und Funktionsgraphen



Für welches b ist $\int_{-2}^{b} g(x)dx = 3$?

(A) $b = 1$

(B) $b = -1$

(C) **TRUE:** $b = 0$

(D) $b = 2$

Lösung:

Das Integral ist die Fläche, die zwischen -2 und b welche vom Graphen von g und der x-Achse aufgespannt wird. Mit Zählen der Kästchen, die rechts von $x = -2$ zwischen der Funktion g und der x-Achse liegen, schliesst man, dass $b = 0$ sein muss.

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Re}(w)$ ist der Realteil der komplexen Zahl $w = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$?

(A) $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(B) $\mathrm{Re}(w) = -\dfrac{5}{2}$

(C) **TRUE:** $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{5}{2}$

(D) $\mathrm{Re}(w) = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Lösung:

Es gilt $w = 5(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 5(1/2 + i\sqrt{3}/2) = \frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$ und damit ist $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{5}{2}$.

2.MC2 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Im}(w)$ ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $w = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$?

(A) **TRUE:** $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(B) $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

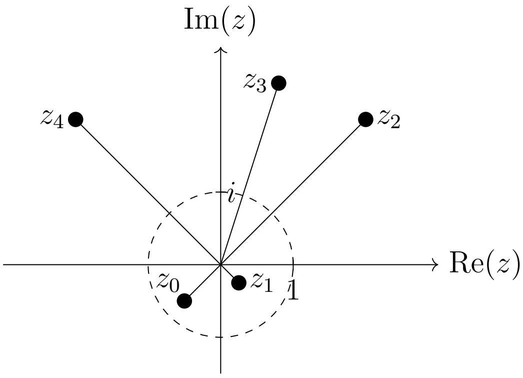
(C) $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{5}{2}$

(D) $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lösung:

Es gilt $w = 5(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 5(1/2 + i\sqrt{3}/2) = \frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$ und damit ist $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

2.MC3 [1 Punkt] Sei z_0 die unten abgebildete komplexe Zahl. Welcher der unten dargestellten Punkte z_1, z_2, z_3 oder z_4 entspricht der komplexen Zahl $\dfrac{1}{z_0}$?



(A) z_1

(B) z_2

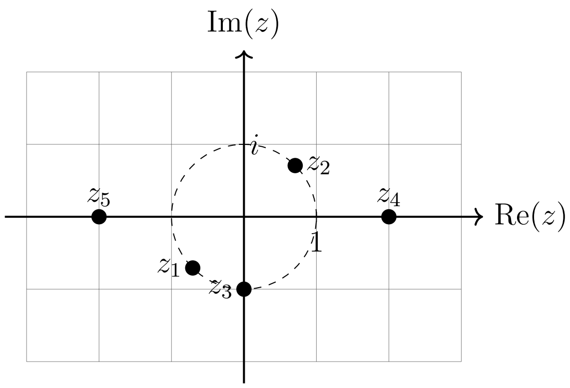
(C) z_3

(D) **TRUE:** z_4

Lösung:

Es gilt $\frac{1}{z_0} = \frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}z_0}$, und $\frac{1}{z_0}$ ist $\overline{z_0}$ in der komplexen Ebene um den Faktor $\frac{1}{|z_0|^2} = \frac{1}{\overline{z_0}z_0}$ gestreckt oder gestaucht, und da $\overline{z_0}$ und z_4 auf einer Geraden liegen, muss $z_4 = \frac{1}{z_0}$ sein.

2.MC4 [**1 Punkt**] Betrachten Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 in der komplexen Zahlenebene unten. Welche der folgenden Gleichungen passt dazu?



(A) **TRUE:** $z_1 z_2 = z_3$

(B) $z_5 = \frac{1}{z_4}$

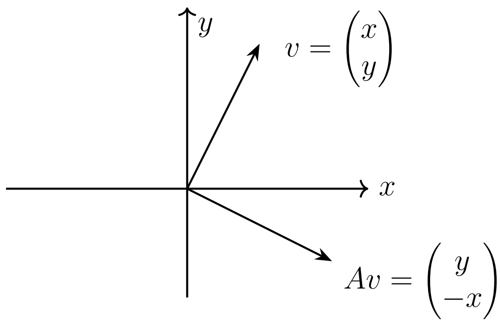
(C) $z_5 z_3 = z_4$

(D) $(z_1)^2 = z_4$

Lösung:

Die einzige korrekte Antwort ist $z_1 z_2 = z_3$. Denn um das Produkt $z_1 z_3$ zu berechnen, müssen wir lediglich deren Winkel addieren, da sie auf dem Einheitskreis liegen. Anschaulich muss das also dem Punkt z_3 entsprechen.

2.MC5 [**1 Punkt**] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



(A) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

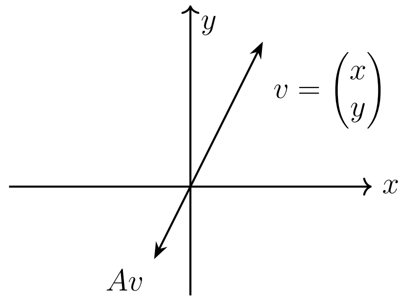
(C) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Da $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ergibt Ausrechnen der rechten Seite, dass dies nur für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gelten kann.

2.MC6 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



(A) $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Im Bild sehen wir $Av = \lambda v$ für $-1 < \lambda < 0$. Also ist v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $-1 < \lambda < 0$. Die korrekte Antwort ist also $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, da dies die einzige Matrix ist, welche einen Eigenwert besitzt, der strikt zwischen -1 und 0 liegt.

2.MC7 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches Y ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Linearen Gleichungssystem $Av = 0$?

(A) $Y = 1$

(B) $Y = -3$

(C) $Y = 0$

(D) **TRUE:** $Y = -2$

Lösung:

Die erste Koordinate des Vektors Av ist $1 + 2Y + 3$. Also muss $1 + 2Y + 3 = 0$ gelten und somit $Y = -2$. Dann sind auch die beiden anderen Koordinatengleichungen erfüllt.

2.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & X & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches X ist $\det(A) = 0$?

Hinweis: Sie müssen nicht zwingend die Determinante berechnen.

(A) $X = 7$

(B) $X = -1$

(C) $X = -3$

(D) **TRUE:** $X = 5$

Lösung:

Das System $Av = 0$, für A aus **2.MC7**, besitzt eine nicht triviale Lösung $v \neq 0$. Also ist $X = 5$ sicher korrekt. Alternativ berechnet sich $\det(A) = 60 - 12X$, und für $\det(A) = 0$ muss $X = 5$ gelten.

2.A1 [6 Punkte] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und λ_3. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert λ_3.

Lösung:

> Da das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten hat, ist die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda_2}$ auch Eigenwert der Matrix, und es gilt $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(ii) Bestimmen Sie $A^3 w$ für einen Eigenvektor w der Matrix A.

Lösung:

> Ein Eigenvektor w erfüllt $Aw = \lambda_i w$ für $i = 1, 2, 3$. Somit also $A^3 w = (\lambda_i)^3 w$. Für die Eigenwerte gilt $(\lambda_i)^3 = 1$. Damit ist $A^3 w = w$.

(iii) Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Startvektor einer Populationsentwicklung $v_{k+1} = Av_k$. Bestimmen Sie v_9.

Lösung:

> Da A drei paarweise verschiedene Eigenwerte hat, sind die drei zugehörigen Eigenvektoren w_1, w_2 und w_3 linear unabhängig. Es gibt also $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ so, dass
>
> $$v_0 = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3.$$
>
> Da aus (ii) bekannt ist, dass $A^3 w_i = w_i$ gilt, ist also
>
> $$A^3 v_0 = c_1 A^3 w_1 + c_2 A^3 w_2 + c_3 A^3 w_3 = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = v_0.$$
>
> Mit $v_9 = A^9 v_0$ folgt dann $v_9 = A^9 v_0 = A^3 A^3 A^3 v_0 = A^3 A^3 v_0 = A^3 v_0 = v_0$.
> Alternativ lässt sich auch $A^3 = E_3$ mit E_3 als Einheitsmatrix berechnen, um $A^3 v_0 = v_0$ zu folgern.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Für welches a ist die Funktion y mit $y(x) = \frac{1}{2}e^{-ax} + 2$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -2y(x) + 4$?

(A) **TRUE:** $a = 2$

(B) $a = \frac{1}{2}$

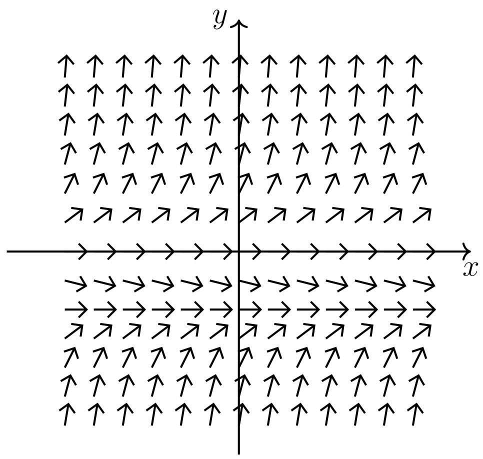
(C) $a = 1$

(D) $a = 4$

Lösung:

Leite die Funktion ab und setze sie wieder ein: $y'(x) = -\frac{a}{2}e^{-ax} = -a(y(x)-2) = -ay(x)+2a$ und damit $y'(x) = -2y(x) + 4 \iff a = 2$. Alternativ liefert dies auch die Lösungformel einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten $y(x)$.

3.MC2 [1 Punkt] Welche Differentialgleichung passt zu folgendem Richtungsfeld?



(A) $y'(x) = -y(x)$

(B) **TRUE:** $y'(x) = (y(x))^2 + y(x)$

(C) $y'(x) = -(y(x))^2$

(D) $y'(x) = \frac{1}{y(x)}$

Lösung:

Da das Richtungsfeld einen Fixpunkt $y_{\infty,1}$ auf der x-Achse und einen Fixpunkt $y_{\infty,2}$ im Bereich unterhalb der x-Achse hat, kann nur $y'(x) = (y(x))^2 + y(x)$ korrekt sein.

3.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP):

$$y'(x) = (y(x)+2)(y(x)-2)(5-y(x)), \quad y(0) = -1.$$

Dann ist $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ldots$

(A) $-\infty$
(B) **TRUE:** -2
(C) 2
(D) 5

Lösung:

Es gibt drei Fixpunkte $y_{\infty,1} = -2$, $y_{\infty,2} = 2$, $y_{\infty,1} = 5$. Für $y(0) = -1$ ist $y'(0) < 0$, also nähert sich $y(x)$ dem Fixpunkt $y_{\infty,2} = -2$ an.

3.MC4 [1 Punkt] Sei $y' = Ay$ das System mit $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von β hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) **TRUE:** $\beta = -3$
(B) $\beta = -1$
(C) $\beta = 1$
(D) $\beta = 6$

Lösung:

Stationäre Lösungen sind Lösungen mit $0 = y' = Ay$. Daher muss $\det(A) = 9 + 3\beta \overset{!}{=} 0$ gelten. Also ist $\beta = -3$.

3.MC5 [1 Punkt] Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(x) + ay'(x) + 5y(x) = 0$?

(A) $a = 2$
(B) $a = 3$
(C) $a = 5$
(D) **TRUE:** $a = 6$

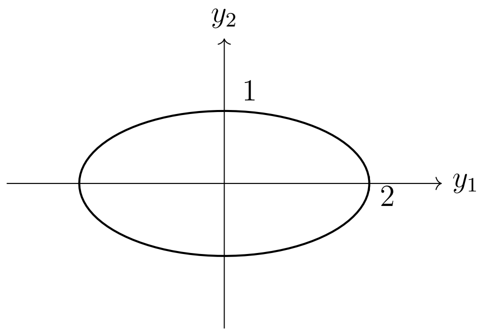
Lösung:

Mit der charakteristischen Gleichung muss $\lambda^2 + a\lambda + 5\lambda = 0 \overset{!}{=} (\lambda+1)(\lambda+5)$ gelten. Die rechte Seite wird $\lambda^2 + a\lambda + 5 \overset{!}{=} \lambda^2 + (5+1)\lambda + 5$ und damit ist $a = 6$.

Alternativ: Es gilt $y'(x) = -C_1 e^{-x} + -5C_2 e^{-5x}$ und $y''(x) = C_1 e^{-x} + 25C_2 e^{-5x}$. Damit also

$$y'' + ay'(x) + 4y(x) = (C_1 - aC_1 + 5C_1)e^{-x} + (25C_2 - 5aC_2 + 5C_2)e^{-5x} = 0 \iff a = 6.$$

3.MC6 [1 Punkt] Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ mit $y'(t) = Ay(t)$ und $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche Matrix A passt zu folgender Lösungskurve des Systems?



Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel jeweils die Eigenwerte der Matrix A.

(A) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Durch Ausschlussverfahren mit Einsetzen von Punkten auf der Kurve bleibt $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Mit einer eleganteren Argumentation folgt, dass nur $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ komplexe Eigenwerten hat.

(Hier sind es $\pm i$). Daher kann nur diese Matrix eine periodische ellipsenförmige Lösungskurve definieren.

3.MC7 [**1 Punkt**] Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert $y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\lambda = 2$

(B) $\lambda = \frac{1}{2}$.

(C) $\lambda = -2$

(D) **TRUE:** $\lambda = 4$

Lösung:

Rechne $e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = y'(t) = Ay(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$. Damit muss $\lambda = 4$ sein.

3.MC8 [**1 Punkt**] Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $y(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) **TRUE:** $\alpha = 3$

(B) $\alpha = -3$

(C) $\alpha = \frac{1}{3}$

(D) $\alpha = -2$

Lösung:

Rechne $3e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = y'(t) = Ay(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -12 + \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit muss $\alpha = 3$ sein.

3.A1 [**6 Punkte**] Sei $y'(x) = -3x^2 e^{y(x)}$.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

Lösung:

Man schreibt zunächst

$$e^{-y} dy = -3x^2 dx.$$

Durch integrieren beider Seiten erhält man

$$-e^{-y} + C' = \int e^{-y} dy = -3 \int x^2 dx = -x^3 + C''.$$

Da nun

$$e^y = \frac{1}{x^3 + C}$$

ist

$$y = \ln\left(\frac{1}{x^3 + C}\right) = -\ln(x^3 + C).$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $y(0) = \ln(2)$ erfüllt.

Lösung:

Es muss

$$\ln(2) = y(0) = -\ln(0^3 + C) = -\ln(C) = \ln\left(\frac{1}{C}\right).$$

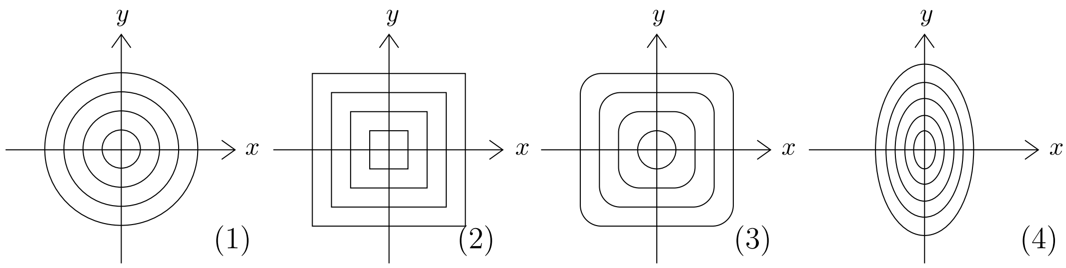
Also muss $2 = 1/C$ gelten. Damit ist $C = 1/2$ und

$$y(x) = -\ln(x^3 + 1/2).$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Aufgabe 4

4.MC1 [1 Punkt] Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (Höhenlinien) der Funktion f?



(A) (1)
(B) (2)
(C) (3)
(D) **TRUE:** (4)

Lösung:

Die Lösung ist (4).

4.MC2 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = e^x + xy + y^2$. Dann ist der Gradient $\nabla g(x, y) = \dots$

(A) $\begin{pmatrix} e^x + y \\ e^x + 2y \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $\begin{pmatrix} e^x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} e^x \\ x + 2y \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} e^x + y \\ 2y \end{pmatrix}$

Lösung:

Es gelten $g_x(x, y) = e^x + y$ und $g_y(x, y) = x + 2y$. Damit also $\nabla g(x, y) = (e^x + y, x + 2y)$.

4.MC3 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = e^x + xy + y^2$. Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\ell(x, y) = (e + 2)x + by - 6$ die Tangentialebene von g an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 2)$? **Hinweis:** Sie müssen nicht zwingend ableiten.

(A) $b = 7$
(B) $b = 1$

(C) **TRUE:** $b = 5$

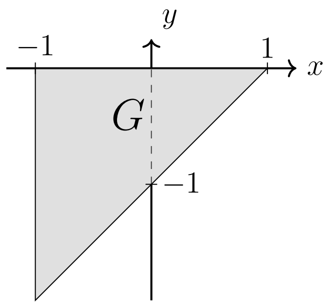
(D) $b = 2$

Lösung:

Es gilt $(e+2) + 2b - 6 = \ell(1,2) \stackrel{!}{=} g(1,2) = e + 2 + 2^2 = e + 6$. Damit also $b = 5$.

Alternativ: Die Tangentialebene von g an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,2)$ ist der Graph der Funktion $\ell(x,y) = g(1,2) + g_x(1,2)(x-1) + g_y(1,2)(y-2)$. Also muss $b = g_y(1,2) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ sein.

4.MC4 [1 Punkt] Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks G unten?



(A) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dydx$

(B) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x+1} dydx$

(C) $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{x+1} dydx$

(D) **TRUE:** $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{0} dydx$

Lösung:

Für die Fläche gilt, dass für jedes $-1 \leq x \leq 1$ der y-Wert dann $x - 1 \leq y \leq 0$ erfüllt. Die Fläche G hat den Inhalt $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$, und das ergibt auch $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{0} dydx = 2$. Alle anderen Integrale sind $\neq 2$.

4.MC5 [1 Punkt] Sei $\widetilde{G}$ der Teil des Gebiets G in **4.MC4** oben, der rechts von der y-Achse liegt, also ist $x \geq 0$. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $I = \int\int_{\widetilde{G}} Kx \, dA = 1$?

(A) $K = 1$

(B) **TRUE:** $K = 6$

(C) $K = -6$

(D) $K = 3$

Lösung:

Da $\widetilde{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \geq y \geq x - 1, 1 \geq x \geq 0\}$, gilt

$$I = \int\int_{\widetilde{G}} Kx \, dA = \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{0} Kx \, dydx = K\int_{0}^{1} -x(x-1)dx$$
$$= K\int_{0}^{1} -(x^2 - x)dx = -K\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = -K\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = K\frac{1}{6}.$$

Damit ist $I = 1$ genau dann, wenn $K = 6$.

4.MC6 **[1 Punkt]** Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$. Der Punkt $(1, 1)$ ist kritisch und ...

(A) **TRUE:** ein lokales Minimum

(B) ein lokales Maxmimum

(C) Sattelpunkt

(D) Keines von diesen

Lösung:

Es gelten $h_x = 3x^2 - 3, h_y = 3y^2 - 3$ und damit

$$h_{xx} = 6x, \quad h_{xy} = h_{yx} = 0, \quad h_{yy} = 6y.$$

und weiter $D = D(1, 1) = h_{xx}(1, 1)h_{yy}(1, 1) - (h_{xy}(1, 1))^2 = 36 > 0$ und $h_{xx}(1, 1) = 6 > 0$. Also ist $(1, 1)$ ein lokales Minimum.

4.MC7 **[1 Punkt]** Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = 2x^2 - 3x + y^3 - y$. Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 15?

(A) $(x, y) = (5, 2)$

(B) **TRUE:** $(x, y) = (3, 2)$

(C) $(x, y) = (-4, 3)$

(D) $(x, y) = (7, 0)$

Lösung:

Die Lösung ist $(x, y) = (3, 2)$. Für alle anderen Punkte ist $h(x, y) \neq 15$.

4.MC8 **[1 Punkt]** Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = 2x^2 - 3x + y^3 - y$. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x, y)-Ebene, auf der $P = (0, 1)$ liegt. Die Steigung m der Tangente an γ in P ist

(A) **TRUE:** $m = \frac{3}{2}$

(B) $m = -1$

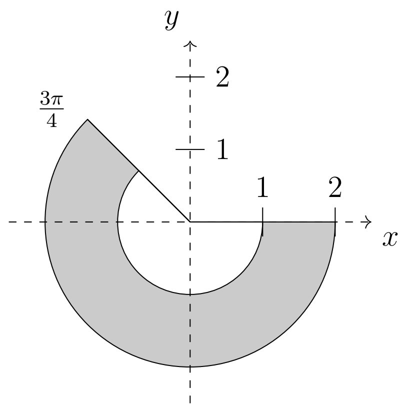
(C) $m = -\frac{4}{3}$

(D) $m = 0$

Lösung:

Mit impliziter Differentiation ist $y_0'(x_0) = -\frac{h_x(x_0, y_0)}{h_y(x_0, y_0)} = -\frac{4x_0 - 3}{3y_0^2 - 1}$ die Steigung der Tangente an der Kurve γ in (x_0, y_0) ist. Mit Einsetzen von $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ergibt sich $m = -\frac{-3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$.

4.A1 [4 Punkte] Sei P die graue Fläche in der folgenden Abbildung



(i) Vervollständigen Sie durch Angabe von R_a und φ_2 die Beschreibung der Fläche P in der Form

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),\ r \in [1, R_a],\ \varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \varphi_2\right]\right\}.$$

Lösung:

Eine geeignete Parametrisierung ist

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),\ r \in [1,2],\ \varphi \in [3\pi/4, 2\pi]\right\}.$$

Also $R_a = 2$ und $\varphi_2 = 2\pi$

(ii) Bestimmen Sie $I = \iint_P \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dA$.

Lösung:

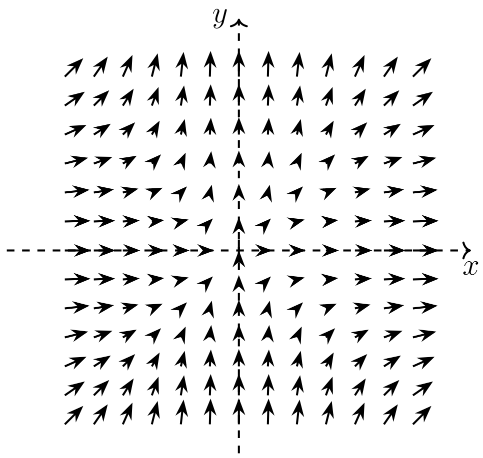
Mit Parametrisierung folgt, dass $I = \int_{3\pi/4}^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^4} r dr d\varphi$. Also ist

$$I = \frac{5\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{r^3} dr = \frac{5\pi}{4} \left[\frac{r^{-2}}{-2}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{5\pi}{4} \frac{3}{8} = \frac{15\pi}{32}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

Aufgabe 5

5.MC1 [1 Punkt] Welches Vektorfeld K mit $K(x,y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

(B) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

(D) $K(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y^2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Da die Pfeile immer nach rechts oben zeigen, kann nur $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ korrekt sein.

5.MC2 [1 Punkt] Welches der folgenden Vektorfelder K mit $K(x,y)$ ist konservativ?

(A) **TRUE:** $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

(B) $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}$

(C) $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

(D) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Vektorfelder sind auf der ganzen Ebene definiert, und für $K(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ist konservativ damit äquivalent zu $P_y = Q_x$. Rechne im Fall $K(x, y) = (2xy, x^2)$, dass dann $P_y - Q_x = 2x - 2x = 0$ und sonst $\neq 0$ gilt.

5.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+3y^2 \end{pmatrix}$. Für welches der folgenden f mit $f(x,y)$ ist der Gradient $\nabla f(x,y) = K(x,y)$?

(A) $f(x,y) = x - y^2$

(B) $f(x,y) = x^2 - xy$

(C) $f(x,y) = 2xy^2$

(D) **TRUE:** $f(x,y) = x^2y + y^3$

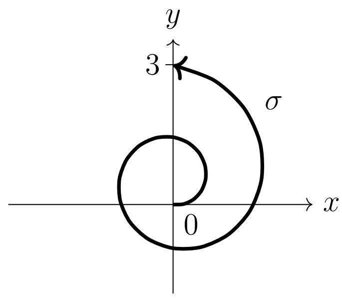
Lösung:

Für $f(x,y) = xe^x - xy^2$ gilt

$$\nabla f(x,y) = (e^x + xe^x - y^2, -2xy) = (e^x(1+x) - y^2, -2xy) = K(x,y).$$

Für alle anderen Funktionen ist das nicht der Fall.

5.MC4 [1 Punkt] Gegeben seien wieder das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+3y^2 \end{pmatrix}$ aus **5.MC3** und die ebene Kurve σ unten. Die Arbeit $A = \int_\sigma K \cdot d\gamma$ ist dann ...



(A) **TRUE:** $A = 27$

(B) $A = 18$

(C) $A = 82$

(D) $A = 32$

Lösung:

Das Vektorfeld ist konservativ, da $K(x,y) = \nabla f(x,y)$ für $f(x,y) = x^2y + y^3$. Also ist

$$A = \int_\sigma K \cdot d\gamma = f(0,3) - f(0,0) = 3^3 = 27.$$

5.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld $K(x,y)$ mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ ye^x \end{pmatrix}$.

Dann ist $\operatorname{div}(K)(x,y) = \ldots$

(A) **TRUE:** $2x + e^x$

(B) $2xe^x$

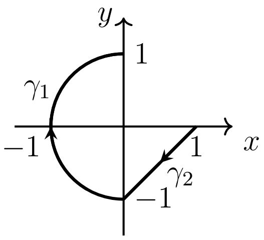
(C) $-x^2 + 2xe^x$

(D) $x^2 - e^x$

Lösung:

Sei $K = (P, Q)$. Dann gilt $\text{div}(K) = P_x + Q_y = 2x + e^x$.

5.MC6 [1 Punkt] Die Kurven γ_1 (auf einer Kreislinie) und γ_2 (auf einer Geraden) sind in der folgenden Abbildung gegeben.



Welche Angaben unten geben eine Parametrisierung der Kurve γ_2?

(A) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(B) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(C) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(D) **TRUE:** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

Lösung:

Es gilt $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}$ für $t \in [0,1]$. Alle anderen Möglichkeiten stimmen nicht mit der Kurve γ_2 überein.

5.MC7 [1 Punkt] Für γ_1 aus **5.MC6** und $I = \int_{\gamma_1} (x^2+y^2)ds$ gilt $I = \ldots$

(A) π^2

(B) **TRUE:** π

(C) $\frac{\pi^2}{2}$

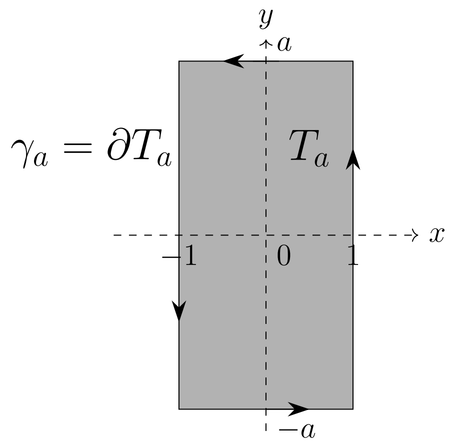
(D) 2π

Lösung:

Es gilt $I = \int_{\gamma_1} (x^2+y^2)ds = \int_{\gamma_1} ds = \text{Länge}(\gamma_1) = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

5.MC8 [1 Punkt] Sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$. Gegeben Sie das ebene Gebiet T_a mit Randkurve $\partial T_a = \gamma_a$, wie in der folgenden Abbildung (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -a \leq y \leq a\}$ von $a > 0$ ab.

Für welches $a \geq 0$ ist $\oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds = 24$?



(A) **TRUE:** $a = 2$

(B) $a = 4$

(C) $a = 6$

(D) $a = 12$

Lösung:

Mit dem Satz von Gauss gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds &= \iint_{T_a} \operatorname{div}(K)(x,y) dA = \iint_{T_a} (-1+4) dA \\ &= 3 \iint_{T_a} dA = 3 \cdot \text{Fläche}(T_a) = 3(2a \cdot 2) = 12a \overset{!}{=} 24 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $a = 2$.

5.A1 [4 Punkte] Sei das von $b > 0$ abhängige Vektorfeld K_b mit $K_b(x,y) = \begin{pmatrix} -by + x^2 \\ y^2 + 4bx \end{pmatrix}$ gegeben.

Sei T_a das Gebiet aus **5.MC8** oben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$, in Abhängigkeit von a und b. **Hinweis:** Eine Parametrisierung der Kurve ist nicht notwendig.

Lösung:

Für $K_b = (P,Q)$ sind $P_y(x,y) = -b, Q_x(x,y) = 4b$.

Mit der Formel von Green (bei richtiger Orientierung) folgt

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_a} K_b d\gamma &= \iint_{T_a} (Q_x - P_y) dA \\ &= \iint_{T_a} (4b + b) dA = 5b \iint_{T_a} dA = 5b \cdot (2a) \cdot 2 = 20ab.\end{aligned}$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1.**