ETH zürich

D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0292-00J (Jahreskurs)

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-XXX-XXX

Prüfungs-Nr.

328

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei f die Funktion mit $f(x) = \cos(x)(1-x) - 1$. Dann gilt für die Ableitung f'

(A) $f'(x) = (x-1)(\sin(x) - \cos(x))$
(B) $f'(x) = x\sin(x)$
(C) $f'(x) = (x-1)\sin(x) - \cos(x)$
(D) $f'(x) = \sin(x) - x\cos(x)$

1.MC2 [1 Punkt] Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\cos(x)(1-x)-1}$ ist ...

(A) -4
(B) 0
(C) 3
(D) -2

1.MC3 [1 Punkt] Sei ℓ mit $\ell(x)$ die Tangente der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)(1-x^2)$ an der Stelle $x_0 = \pi$. Welches $\ell(x)$ unten gehört dazu?

Hinweis: Sie müssen dafür nicht zwingend Ableitungen berechnen.

(A) $\ell(x) = (\pi^2 - 1)x + \pi - \pi^3$
(B) $\ell(x) = \pi^2 x + \pi + \pi^3$
(C) $\ell(x) = (\pi^2 - 1)x + \pi + \pi^3$
(D) $\ell(x) = \pi^2 x + \pi^3$

1.MC4 [1 Punkt] Sei $T_2(x) = 1 + x + a_2x^2$ das 2. Taylor-Polynom der Funktion f mit $f(x) = e^x - x^2$ an der Stelle $x_0 = 0$. Der Koeffizient a_2 ist

(A) $a_2 = -\dfrac{1}{2}$
(B) $a_2 = -1$
(C) $a_2 = 1$
(D) $a_2 = \dfrac{1}{2}$

1.MC5 [1 Punkt] Sei $f(x) = \dfrac{ax^2}{x^2-2}$. Für welches a ist $\tilde{x} = 2$ ein Fixpunkt der zugehörigen Funktion f?

(A) $a = 1$
(B) $a = \dfrac{1}{2}$
(C) $a = 2$
(D) $a = 0$

1.MC6 [1 Punkt] Sei $f(x) = ax(1-x)$. Für welches a ist $\widetilde{x} = 0$ ein attraktiver Fixpunkt der zugehörigen Funktion f? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe bei $\widetilde{x} = 0$ konvergiert gegen $\widetilde{x} = 0$.

(A) $a = 2$

(B) Es gibt kein solches a.

(C) $a = 3$

(D) $a = \frac{1}{2}$

1.MC7 [1 Punkt] Sei $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt$. Dann ist $F(4) = \dots$

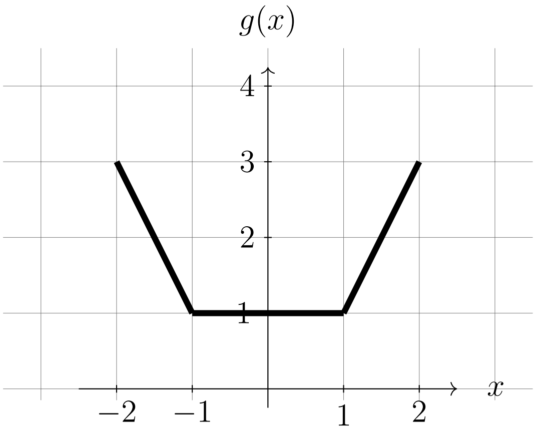
(A) 1

(B) $\ln(2)$

(C) $\frac{1}{\ln(2)}$

(D) 2

1.MC8 [1 Punkt] Sei g die Funktion mit $g(x) = |x-1| + |x+1| - 1$ und Funktionsgraphen



Für welches b ist $\int_{-2}^{b} g(x)dx = 3$?

(A) $b = 1$

(B) $b = -1$

(C) $b = 0$

(D) $b = 2$

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Re}(w)$ ist der Realteil der komplexen Zahl $w = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$?

(A) $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(B) $\mathrm{Re}(w) = -\dfrac{5}{2}$

(C) $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{5}{2}$

(D) $\mathrm{Re}(w) = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

2.MC2 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Im}(w)$ ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $w = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$?

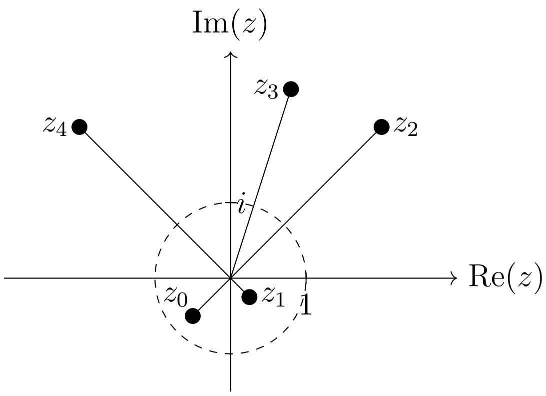
(A) $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(B) $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(C) $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{5}{2}$

(D) $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.MC3 [1 Punkt] Sei z_0 die unten abgebildete komplexe Zahl. Welcher der unten dargestellten Punkte z_1, z_2, z_3 oder z_4 entspricht der komplexen Zahl $\dfrac{1}{z_0}$?



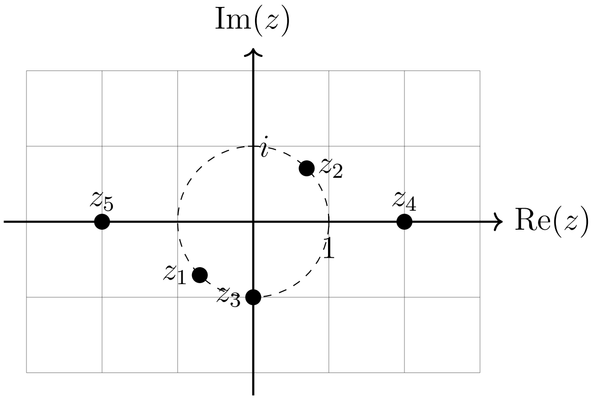
(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

2.MC4 [1 Punkt] Betrachten Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 in der komplexen Zahlenebene unten. Welche der folgenden Gleichungen passt dazu?



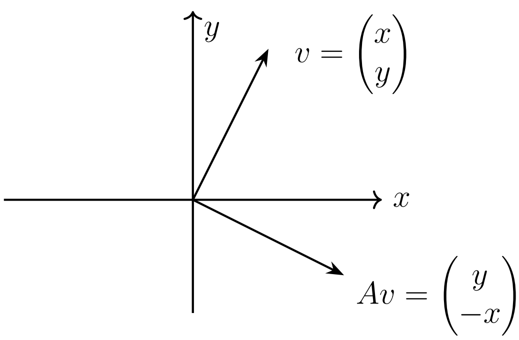
(A) $z_1 z_2 = z_3$

(B) $z_5 = \dfrac{1}{z_4}$

(C) $z_5 z_3 = z_4$

(D) $(z_1)^2 = z_4$

2.MC5 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



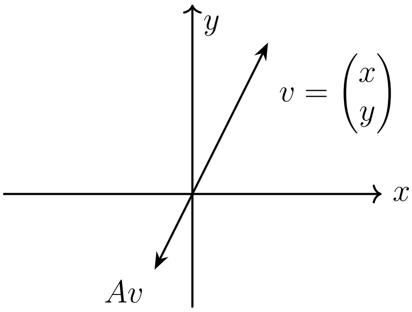
(A) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2.MC6 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



(A) $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

2.MC7 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches Y ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Linearen Gleichungssystem $Av = 0$?

(A) $Y = 1$

(B) $Y = -3$

(C) $Y = 0$

(D) $Y = -2$

2.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & X & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches X ist $\det(A) = 0$?

Hinweis: Sie müssen nicht zwingend die Determinante berechnen.

(A) $X = 7$

(B) $X = -1$

(C) $X = -3$

(D) $X = 5$

2.A1 [6 Punkte] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und λ_3. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert λ_3.

(ii) Bestimmen Sie $A^3 w$ für einen Eigenvektor w der Matrix A.

(iii) Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Startvektor einer Populationsentwicklung $v_{k+1} = Av_k$. Bestimmen Sie v_9.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Für welches a ist die Funktion y mit $y(x) = \frac{1}{2}e^{-ax} + 2$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -2y(x) + 4$?

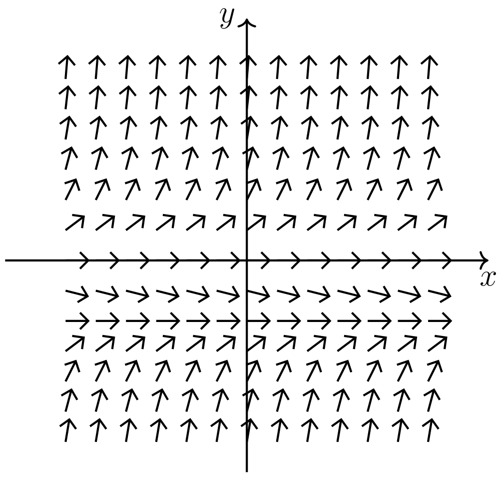
(A) $a = 2$

(B) $a = \frac{1}{2}$

(C) $a = 1$

(D) $a = 4$

3.MC2 [1 Punkt] Welche Differentialgleichung passt zu folgendem Richtungsfeld?



(A) $y'(x) = -y(x)$

(B) $y'(x) = (y(x))^2 + y(x)$

(C) $y'(x) = -(y(x))^2$

(D) $y'(x) = \frac{1}{y(x)}$

3.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP):

$$y'(x) = (y(x) + 2)(y(x) - 2)(5 - y(x)), \quad y(0) = -1.$$

Dann ist $\lim_{x\to\infty} y(x) = \dots$

(A) $-\infty$

(B) -2

(C) 2

(D) 5

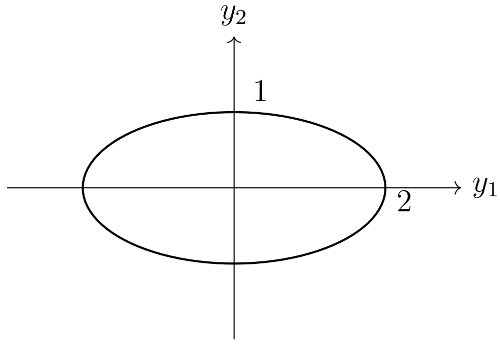
3.MC4 [1 Punkt] Sei $y' = Ay$ das System mit $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von β hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\beta = -3$
(B) $\beta = -1$
(C) $\beta = 1$
(D) $\beta = 6$

3.MC5 [1 Punkt] Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(x) + ay'(x) + 5y(x) = 0$?

(A) $a = 2$
(B) $a = 3$
(C) $a = 5$
(D) $a = 6$

3.MC6 [1 Punkt] Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ mit $y'(t) = Ay(t)$ und $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche Matrix A passt zu folgender Lösungskurve des Systems?



Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel jeweils die Eigenwerte der Matrix A.

(A) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
(C) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

3.MC7 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert $y(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\lambda = 2$

(B) $\lambda = \frac{1}{2}$.

(C) $\lambda = -2$

(D) $\lambda = 4$

3.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $y(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\alpha = 3$

(B) $\alpha = -3$

(C) $\alpha = \frac{1}{3}$

(D) $\alpha = -2$

3.A1 [6 Punkte] Sei $y'(x) = -3x^2 e^{y(x)}$.

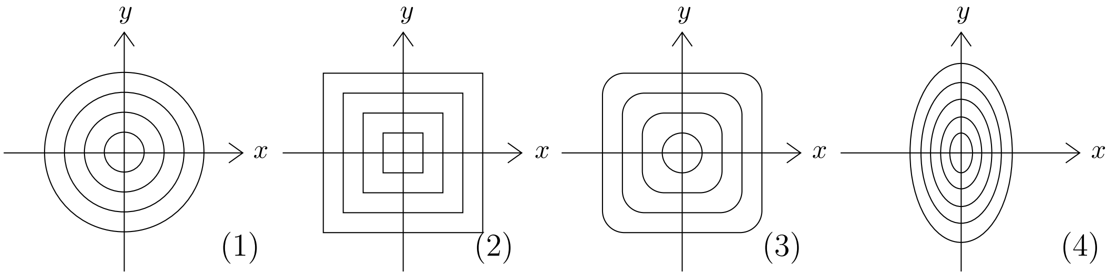
(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $y(0) = \ln(2)$ erfüllt.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Aufgabe 4

4.MC1 [1 Punkt] Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (Höhenlinien) der Funktion f?



(A) (1)
(B) (2)
(C) (3)
(D) (4)

4.MC2 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = e^x + xy + y^2$. Dann ist der Gradient $\nabla g(x, y) = \dots$

(A) $\begin{pmatrix} e^x + y \\ e^x + 2y \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} e^x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

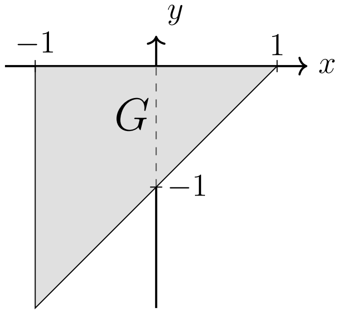
(C) $\begin{pmatrix} e^x \\ x + 2y \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} e^x + y \\ 2y \end{pmatrix}$

4.MC3 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = e^x + xy + y^2$. Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\ell(x, y) = (e + 2)x + by - 6$ die Tangentialebene von g an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 2)$? **Hinweis:** Sie müssen nicht zwingend ableiten.

(A) $b = 7$
(B) $b = 1$
(C) $b = 5$
(D) $b = 2$

4.MC4 [1 Punkt] Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks G unten?



(A) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dydx$

(B) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x+1} dydx$

(C) $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{x+1} dydx$

(D) $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{0} dydx$

4.MC5 [1 Punkt] Sei $\widetilde{G}$ der Teil des Gebiets G in **4.MC4** oben, der rechts von der y-Achse liegt, also ist $x \geq 0$. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $I = \int\int_{\widetilde{G}} Kx\, dA = 1$?

(A) $K = 1$

(B) $K = 6$

(C) $K = -6$

(D) $K = 3$

4.MC6 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$. Der Punkt $(1, 1)$ ist kritisch und . . .

(A) ein lokales Minimum

(B) ein lokales Maxmimum

(C) Sattelpunkt

(D) Keines von diesen

4.MC7 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = 2x^2 - 3x + y^3 - y$. Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 15?

(A) $(x, y) = (5, 2)$

(B) $(x, y) = (3, 2)$

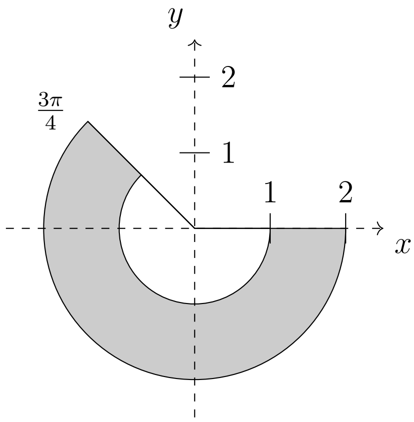
(C) $(x, y) = (-4, 3)$

(D) $(x, y) = (7, 0)$

4.MC8 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = 2x^2 - 3x + y^3 - y$. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x, y)-Ebene, auf der $P = (0, 1)$ liegt. Die Steigung m der Tangente an γ in P ist

(A) $m = \dfrac{3}{2}$
(B) $m = -1$
(C) $m = -\dfrac{4}{3}$
(D) $m = 0$

4.A1 [4 Punkte] Sei P die graue Fläche in der folgenden Abbildung



(i) Vervollständigen Sie durch Angabe von R_a und φ_2 die Beschreibung der Fläche P in der Form

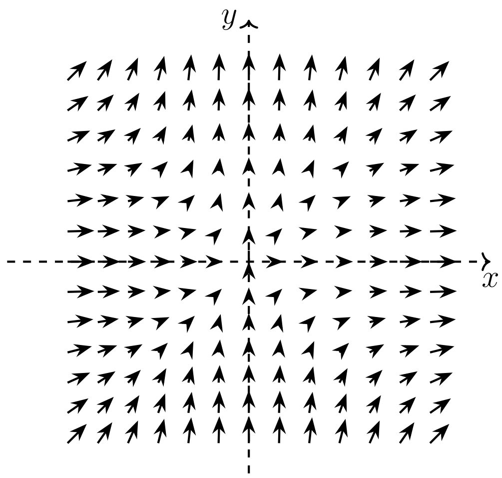
$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),\ r \in [1, R_a],\ \varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \varphi_2\right]\right\}.$$

(ii) Bestimmen Sie $I = \displaystyle\iint_P \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dA$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

Aufgabe 5

5.MC1 [1 Punkt] Welches Vektorfeld K mit $K(x, y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

(B) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$

(C) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

(D) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y^2 \end{pmatrix}$

5.MC2 [1 Punkt] Welches der folgenden Vektorfelder K mit $K(x, y)$ ist konservativ?

(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

(B) $K(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}$

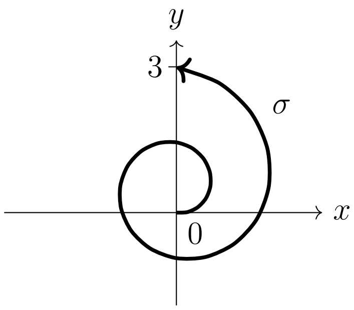
(C) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

(D) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

5.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+3y^2 \end{pmatrix}$. Für welches der folgenden f mit $f(x,y)$ ist der Gradient $\nabla f(x,y) = K(x,y)$?

(A) $f(x,y) = x - y^2$
(B) $f(x,y) = x^2 - xy$
(C) $f(x,y) = 2xy^2$
(D) $f(x,y) = x^2y + y^3$

5.MC4 [1 Punkt] Gegeben seien wieder das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+3y^2 \end{pmatrix}$ aus **5.MC3** und die ebene Kurve σ unten. Die Arbeit $A = \int_\sigma K \cdot d\gamma$ ist dann ...



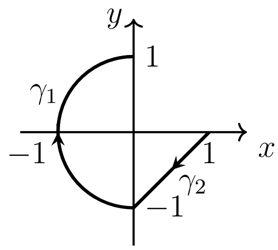
(A) $A = 27$
(B) $A = 18$
(C) $A = 82$
(D) $A = 32$

5.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld $K(x,y)$ mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ ye^x \end{pmatrix}$.

Dann ist $\operatorname{div}(K)(x,y) = \ldots$

(A) $2x + e^x$
(B) $2xe^x$
(C) $-x^2 + 2xe^x$
(D) $x^2 - e^x$

5.MC6 [1 Punkt] Die Kurven γ_1 (auf einer Kreislinie) und γ_2 (auf einer Geraden) sind in der folgenden Abbildung gegeben.



Welche Angaben unten geben eine Parametrisierung der Kurve γ_2?

(A) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(B) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(C) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(D) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

5.MC7 [1 Punkt] Für γ_1 aus **5.MC6** und $I = \int_{\gamma_1} (x^2+y^2)ds$ gilt $I = \ldots$

(A) π^2

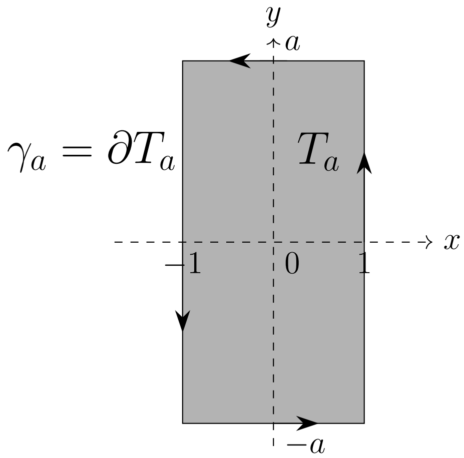
(B) π

(C) $\frac{\pi^2}{2}$

(D) 2π

5.MC8 [1 Punkt] Sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$. Gegeben Sie das ebene Gebiet T_a mit Randkurve $\partial T_a = \gamma_a$, wie in der folgenden Abbildung (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -a \leq y \leq a\}$ von $a > 0$ ab.

Für welches $a \geq 0$ ist $\oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds = 24$?



(A) $a = 2$
(B) $a = 4$
(C) $a = 6$
(D) $a = 12$

5.A1 [4 Punkte] Sei das von $b > 0$ abhängige Vektorfeld K_b mit $K_b(x,y) = \begin{pmatrix} -by + x^2 \\ y^2 + 4bx \end{pmatrix}$ gegeben. Sei T_a das Gebiet aus **5.MC8** oben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$, in Abhängigkeit von a und b. **Hinweis:** Eine Parametrisierung der Kurve ist nicht notwendig.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1.**