Dr. A. Caspar

ETH Zürich, Januar 2012

D–BIOL, D–CHAB

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^2}{x^3 - 3x + 2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - x - 1}{3x^5 - 2x - 7} = \underline{\qquad\qquad}.$$

c) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \ln(\cos(x))$. Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ von f im Punkt $x_0 = 0$:

$T_2(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$

d) Die Nullstellen des Polynoms:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

sind:

$$x_1 = \underline{\quad 1 \quad}, \quad x_2 = \underline{\qquad\qquad}, \quad x_3 = \underline{\qquad\qquad}.$$

e) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} x\cos(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

f) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Auf welchem Intervall I ist die Funktion f streng monoton wachsend?

☐ $I\ =]-1, 1[$
☐ $I\ =]-3, -2[$
☐ $I\ =]1, 2[$

g) Gegeben sei die Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \tan(x)y$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{yy} und f_{xy} im Punkt $(0, 0)$:

$$f_{xx}(0,0) = \underline{\qquad\qquad}, \quad f_{xy}(0,0) = \underline{\qquad\qquad}, \quad f_{yy}(0,0) = \underline{\qquad\qquad}.$$

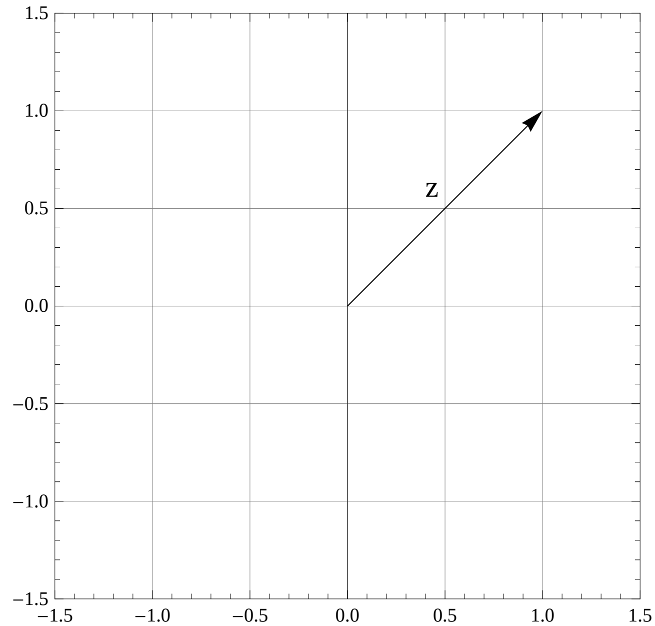
Bitte wenden!

2. (*8 Punkte*)
Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) Schreiben Sie $z = 7\sqrt{3} - 7i$ in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

$$z = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

b) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 + i$ in der komplexen Ebene. Zeichnen Sie in der komplexen Ebene $-z$ and $\frac{1}{z}$:



c) Gegeben sei die Zahl $z = \frac{5+2i}{-5r+i}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Für welches r ist z eine reelle Zahl? Geben Sie r und das zugehörige z an.

$$r = \_\_\_\_\_\_\_\_, \quad z = \_\_\_\_\_\_\_\_ \in \mathbb{R}.$$

d) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{und} \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad \mathrm{Im}(z_1 z_2) = \_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3. (*12 Punkte*)

a) Die Antworten in **Teil**aufgabe **a)** müssen Sie **nicht** begründen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

i) Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eindeutig lösbar.
☐ richtig
☐ falsch

ii) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.
☐ richtig
☐ falsch

iii) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lässt sich als nicht-triviale Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ schreiben.
☐ richtig
☐ falsch

iv) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten besitzt mindestens eine Lösung.
☐ richtig
☐ falsch

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren.

c) Bestimmen Sie α so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

4. *(12 Punkte)*

a) Wie lautet die Lösung des untenstehenden Anfangswertproblems

$$y'(x) = y(x)(3x^2 - 1) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 2?$$

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 4.$$

i) Finden Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

ii) Geben Sie nun die Lösung des Anfangswertproblems an.

c) Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem

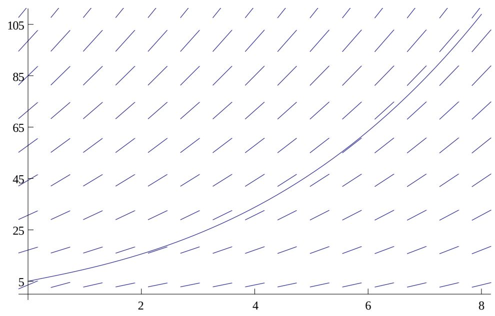
$$\big(y'(x) + 1\big) \ln\left(\frac{|x + y(x) - 1|}{2}\right) = x + y(x) - 1 \quad \text{mit} \qquad y(0) = 5.$$

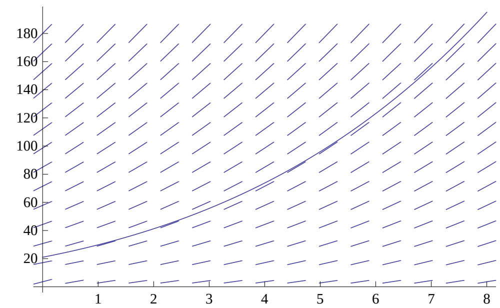
i) Finden Sie die allgemeine Lösung dieses Anfangswertproblems durch geeignete Substitution.

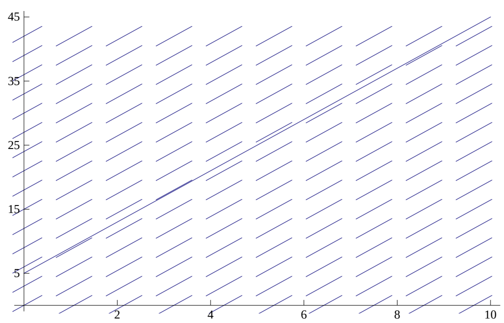
ii) **Siehe nächstes Blatt!**

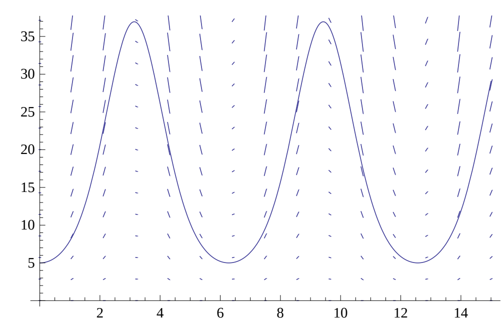
Siehe nächstes Blatt!

ii) Eine der folgenden **4** Graphiken mit Richtungsfeld und eingezeichneter Lösungskurve passt zur Lösung des obigen Anfangswertproblems. Entscheiden Sie, welche dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Teilaufgabe ii) kann auch ohne die Lösung des Anfangswertproblems in i), gelöst werden. Wenn Sie jedoch die Teilaufgabe i) gelöst haben, können Sie diese für Ihre Begründung verwenden.









Bitte wenden!

5. (*8 Punkte*)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 20x + 20y - 1.$$

Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + 3y^2 + 1).$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen G_f von f im Punkt $(0, 1, \ln(4))$.

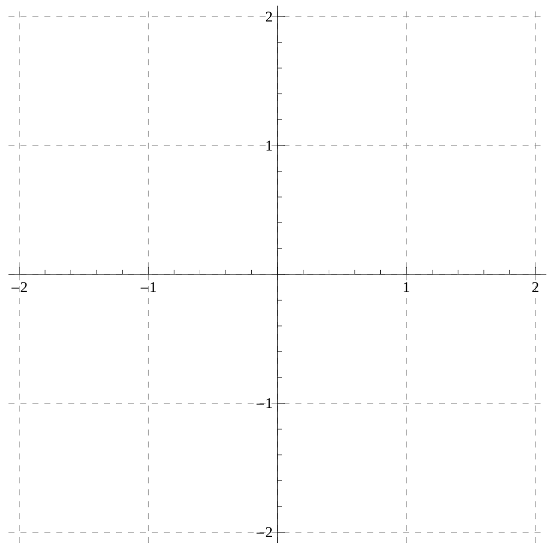
6. (*10 Punkte*)

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \quad (t, t^3) & \text{für } 0 \le t \le 1,\\ \gamma_2(t) &= (1-t, 1+t) & \text{für } 0 \le t \le 1,\\ \gamma_3(t) &= \quad (0, 2-t) & \text{für } 0 \le t \le 2, \end{aligned}$$

parametrisierten Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gegeben. Durchlaufen wir γ_1, γ_2 und γ_3, erhalten wir eine geschlossene Kurve γ.

a) Stellen Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 graphisch dar, indem Sie diese in das folgende Koordinatensystem einzeichnen. Geben Sie auch die Richtung an.



b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} y^2\,dx + x\,dy,\\ I_2 &= \int_{\gamma_2} y^2\,dx + x\,dy,\\ I_3 &= \int_{\gamma_3} y^2\,dx + x\,dy. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe **b)** das Kurvenintegral

$$I = \int_{\gamma} y^2\,dx + x\,dy.$$

d) Berechnen Sie das Kurvenintegral I mit Hilfe der Formel von Green.