Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2014**

BIOL-B HST PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1	-		-	
2	-		-	
3				
4				
5				
6	-		-	
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
  Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_1^2 \sin\big(\ln(x)\big)\,dx = \underline{\hspace{7cm}}.$$

d) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}$$

(im Punkt $x_0 = 0$). Bestimmen Sie $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ und $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

e) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

$x_1 = \underline{\hspace{3cm}}$ $\quad x_2 = \underline{\hspace{3cm}}$ $\quad x_3 = \underline{\hspace{3cm}}$.

f) Bestimmen Sie das lokale Maximum und das lokale Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

Im Punkt $(x_{min}, y_{min}) = \underline{\hspace{3cm}}$ hat f ein lokales Minimum.

Im Punkt $(x_{max}, y_{max}) = \underline{\hspace{3cm}}$ hat f ein lokales Maximum.

g) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 \le x < \frac{\pi}{4}, \\ a, & \frac{\pi}{4} \le x < \infty, \end{cases}$$

stetig ist: $a = \underline{\hspace{3cm}}$.

Bitte wenden!

2. (*10 Punkte*)
Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht**.

Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$. Weiter bezeichnet $\overline{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

a) Berechnen Sie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ und den Betrag $r \in [0, \infty)$ von

$$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\frac{i-3}{1-2i}\right), \quad z_3 = \frac{z_2}{z_1^3}.$$

b) Zeichnen Sie die folgenden Zahlen in der komplexen Ebene.

$$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = \frac{1}{8}\overline{(z_1^3)}, \quad z_4 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

c) Wir betrachten die Gleichung

$$z^4 + 2z^3 + z^2 + 6z + 20 = 0.$$

Gegeben, dass eine der Nullstellen $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ist, bestimmen Sie alle anderen Nullstellen von obiger Gleichung.

Hinweis: Für ein Polynom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizienten a_0, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ treten komplexe Nullstellen immer paarweise auf, nämlich als Paare zueinander konjugiert komplexer Zahlen: Ist z_0 eine Nullstelle des Polynoms, so ist also auch $\overline{z}_0$ eine Nullstelle.

Siehe nächstes Blatt!

3. (*10 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
○	○	Für zwei reelle $m \times n$ Matrizen A und B gilt stets $\mathrm{Rang}(A+B) \geq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$.
○	○	Sei $A = \begin{pmatrix} -1/3 & 6 \\ -4 & 1/3 \end{pmatrix}$. Für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $A^n = \lambda \cdot A$.
○	○	Seien A und B zwei reelle $n \times n$ Matrizen. Ist v Eigenvektor zu A und B, so ist v im Allgemeinen kein Eigenvektor zur Matrix $(A-B)^3$.
○	○	Sei $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $\det(A) = -1$. Dann haben A und $B = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dasselbe charakteristische Polynom.

b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 8 \\ -5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mittels des Gaussverfahrens die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2 Matrix, und sei A^T die Transponierte von A. Zeigen Sie: gilt $\det(A) < 0$, so ist auch $\det(A + A^T) < 0$.

4. *(12 Punkte)*

a) MC-Aufgabe

Wir betrachten die Differentialgleichung (DGL)

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0. \tag{1}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	$y(x) = 0$ ist die einzige konstante Lösung der DGL definiert in (1).
○	○	Jede Lösung der DGL in (1) ist von der Form $y(x) = Cxe^{-3x}$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
○	○	Jede Lösung der DGL in (1) ist von der Form $y(x) = Ce^{-3x}$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
○	○	Jede Lösung der DGL in (1) ist von der Form $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$ für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x^2\left(3 + \frac{y(x)}{x}\right)^2 + \frac{y(x)}{x}, \qquad y(1) = -4$$

mittels Separation der Variablen.
Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Substitution.

c) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y'(x) - 2x^5y(x) - e^{\frac{1}{3}x^6 - 2x} = 0. \tag{2}$$

i) Schreiben Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung.
ii) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) an.

5. (*8 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Welche der folgenden Aussagen über die Funktion $f(x,y) = x^4+2x^2y+y^4-y^2$ sind richtig? Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
◯	◯	$(1,-1)$ ist ein kritischer Punkt.
◯	◯	$(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ist ein lokales Minimum.
◯	◯	$(-1,-1)$ ist ein lokales Minimum.
◯	◯	$(1,-1)$ ist ein Sattelpunkt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$z = \sin x \cos y$$

im Flächenpunkt $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$.

c) Bestimmen Sie die Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + 2y^4$$

unter der Nebenbedingung $xy = 1$.

6. (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie das Linienintegral des räumlichen Vektorfeldes

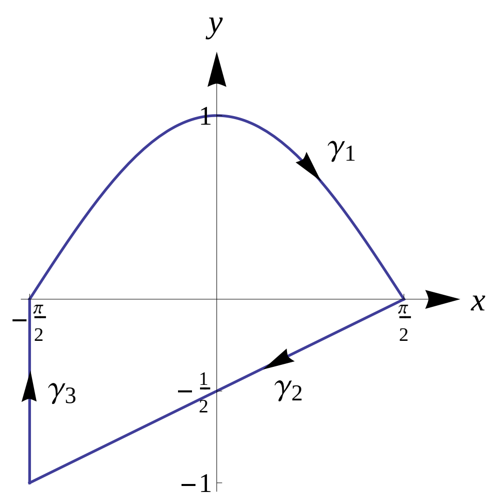
$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ z \\ yz \end{pmatrix}$$

längs der Kurve C, die durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

beschrieben wird.

b) In folgender Skizze sehen Sie drei ebene Kurven γ_1, γ_2 und γ_3: Der Weg γ_1 verläuft entlang der Kurve $y = \cos(x)$. Die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung.



Geben Sie für γ_1, γ_2 und γ_3 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort direkt **auf das Aufgabenblatt**.

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad \_\_\_\_\_\_ \le t \le \_\_\_\_\_\_.$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad \_\_\_\_\_\_ \le t \le \_\_\_\_\_\_.$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad \_\_\_\_\_\_ \le t \le \_\_\_\_\_\_.$$

c) Gegeben seien nun drei ebene Kurven σ_1 und σ_2 und σ_3 parametrisiert durch

$$\begin{aligned}
\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1, \\
\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \text{und} \\
\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2.
\end{aligned}$$

Mit σ bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt, wenn man σ_1, σ_2 und σ_3 nacheinander durchläuft.

i) Zeichnen Sie die Kurven σ_1, σ_2 und σ_3 in ein Koordinatensystem. Geben Sie dabei auch jeweils die Durchlaufrichtung an.

ii) Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$K : (x, y) \mapsto K(x, y) = \Big(P(x, y), Q(x, y)\Big) = \Big(2x + 3y, x + y^2\Big).$$

Berechnen Sie mit der Formel von Green das Kurvenintegral für K entlang σ:

$$\oint_\sigma K \cdot d\sigma = \oint_\sigma (2x + 3y)dx + (x + y^2)dy$$