**Prof. W. Farkas** **ETH Zürich, Februar 2018**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

# Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

---

**1.** (*11 Punkte*)

**a)** (*1 Punkt*) Der Grenzwert ist mit l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

**b)** (*1 Punkt*) Da $\cos(\pi + 2\pi n) = -1$ für alle $n$ gilt, ist der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{2n^2} \cos(\pi + 2\pi n) = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{2n^2} \cdot (-1) = \lim_{n\to\infty} -\frac{12+\frac{5}{n^2}}{2} = -\frac{12}{2} = -6.$$

**c)** (*1 Punkt*) In der Nähe von $x_0$ ist die Funktion $f$ auf der linken Seite fallend (wegen $f'(x) < 0$ für alle $x$ in $[1, 1+\frac{1}{\sqrt{3}})$) und auf der rechten Seite wachsend (wegen $f'(x) > 0$ für alle $x$ in $(1+\frac{1}{\sqrt{3}}, 2]$). Somit ist in $x_0$ ein relatives Minimum. (Die Funktion $f$ ist auch stetig mit stetiger Ableitung).

**d)** (*2 Punkte*) Damit $f$ an der Stelle $x = 0$ stetig ist, muss

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$$

gelten. In diesem Fall ist

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 3\cos(2x) = 3\cos(0) = 3$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 5x^2 + a + bx = a.$$

Daraus folgt

$$a = 3.$$

Damit $f$ an der Stelle $x = 0$ zusätzlich differenzierbar ist, muss die Ableitung von links $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ mit der Ableitung von rechts $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ übereinstimmen. Die Ableitung von links an der Stelle $x = 0$ der Funktion $f$ ist die Ableitung der Funktion $3\cos(2x)$ an der Stelle $x = 0$, also $-6\sin(2\cdot 0) = 0$. Die Ableitung von rechts an der Stelle $x = 0$ der Funktion $f$ ist die Ableitung der Funktion $5x^2+a+bx$ an der Stelle $x = 0$, also $10 \cdot 0 + b = b$.

$$b = 0.$$

**e)** (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_0^{1/c} e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}e^{cx}\Big|_0^{1/c} = \frac{1}{c}(e-1).$$

Also muss gelten

$$\frac{1}{c}(e-1) \stackrel{!}{=} 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{e-1}{7}.$$

**f)** (*2 Punkte*) Der Nenner $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ besitzt die zwei Nullstellen $x = 2$ und $x = 1$, also ist $Q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Die rationale Funktion $f$ muss also in die Form $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$ umgeschrieben. Es ist

$$\frac{5x-6}{x^2-3x+2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x - (A+2B)}{x^2-3x+2}.$$

und somit $A + B = 5$ und $A + 2B = 6$. Es folgt $A = 4$ und $B = 1$. Also ist

$$\frac{5x-6}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-1}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist somit

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx = \int \frac{5x-6}{x^2-3x+2}\,dx &= 4\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= 4\ln|x-2| + \ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

**g)** (*1 Punkt*) Die ersten beiden Ableitungen von $f$ sind $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x$ und $f''(x) = 2e^x + (2x-2)e^x + (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x$. Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \\ &= 0 + 2e^2(x-2) + \frac{6e^2}{2}(x-2)^2 = 3e^2x^2 - 10e^2x + 8e^2. \end{aligned}$$

**h)** (*2 Punkte*) Die Potenzreihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ mit $c_n = \frac{1}{4^n}$ und $x_0 = 1$.

Der Konvergenzradius ist also

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} 4 = 4.$$

Für den Konvergenzbereich muss man noch die Konvergenz in den Randpunkten des Intervalls $(x_0 - r, x_0 + r) = (-3, 5)$ kontrollieren. Für die Randpunkte gilt:

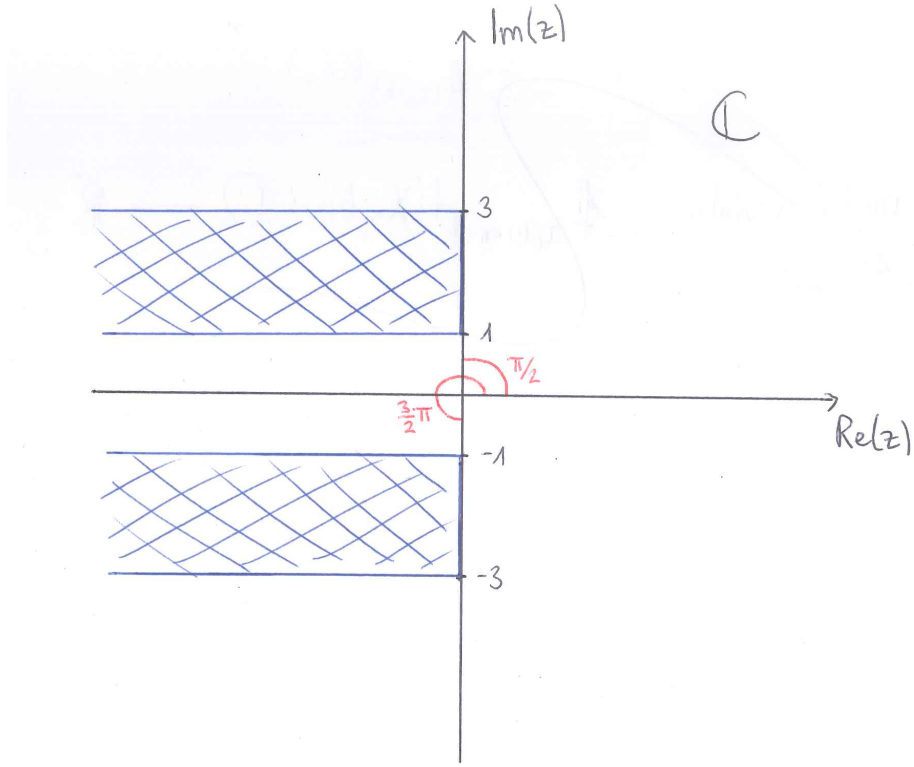
$$\text{falls } x = -3, \text{ dann ist die Reihe gleich } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \text{ also divergent}$$
$$\text{falls } x = 5, \text{ dann ist die Reihe gleich } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1, \text{ also divergent.}$$

Der Konvergenzbereich ist somit das Intervall

$$(-3, 5).$$

**2.** (*9 Punkte*)

**a)** (*2 Punkte*) Die gesuchte Menge ist:




**b)** (*1 Punkt*) Erste Antwortmöglichkeit: Bei Gleichungen mit **reellen** Koeffizienten treten (echte) komplexe Lösungen immer in Paaren auf, d.h. falls $z$ eine Lösung ist, ist auch die komplex Konjugierte $\overline{z}$ eine Lösung. In diesem Fall wäre $z_2$ eine komplexe Lösung jedoch $\overline{z_2}$ nicht, was nicht möglich ist.

Zweite Antwortmöglichkeit: (Gilt auch falls $a$ komplex.) Lösungen von solchen Gleichungen haben den gleichen Betrag (liegen also auf einem Kreis um den Nullpunkt) und von einer Lösung zur nächsten muss man immer um den gleichen Winkel weitergehen. Mit anderen Worten, die Lösungen bilden ein regelmässiges $n$-Eck um den Nullpunkt (hier müsste es ein Dreieck sein), was nicht der Fall ist.

**c)** (*2 Punkte*) Man kann $z_3 = -1$ auch schreiben als $z_3 = e^{i\pi}$. Der Betrag der zwei fehlenden Lösungen $z_1$ und $z_2$ ist 1 wie $z_3$. Um die Winkel zu erhalten, kann man zum Winkel $\pi$ der gegebenen Lösung $z_3$ Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ addieren. Man erhält so einerseits $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$ und andererseits $\pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{7}{3}\pi$. Zuletzt müssen diese Winkel durch Subtraktion von $2\pi$ wieder nach $[0, 2\pi)$ verschoben werden. Man erhält die

Lösungen

$$z_1 = e^{i\frac{5}{3}\pi} \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Andere Darstellungen sind

$$z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Alternativ: Gesucht ist $z = re^{i\varphi}$. Die rechte Seite der Gleichung in exponentieller Darstellung ist

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}.$$

Die zu lösende Gleichung ist somit ist $r^3 e^{i3\varphi} = 1 \cdot e^{i\pi}$. Daraus folgt $r = 1$ und $\varphi = \pi + \frac{2\pi k}{3}$ mit $k = 0, 1, 2$. Die Lösungen der Gleichung sind also in exponentieller Darstellung

$$z_1 = e^{i\frac{5}{3}\pi} \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

**d)** (*1 Punkt*) Für $z$ gilt

$$\begin{aligned} z &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(b + i\sqrt{3}\right) = 2(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6}))(b + i\sqrt{3}) \\ &= 2(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2})(b + i\sqrt{3}) = \sqrt{3}(b-1) + i(b+3). \end{aligned}$$

Damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ gilt, braucht man also

$$b = -3.$$

**e)** (*1 Punkt*) Die Antwort ist

$$(1+i)^2(-1+i)^4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^4 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i3\pi} = 8 \cdot i \cdot (-1) = -8i.$$

**f)** (*2 Punkte*) Für eine komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$ ist $z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$. Somit muss $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten, damit die erste Bedingung erfüllt ist. Daraus folgt $\varphi = \frac{\pi}{4}\pi + k\pi$, was für $k = 0$ (dann ist $\varphi = \frac{\pi}{4}$) und $k = 1$ (dann ist $\varphi = \frac{5}{4}\pi$) in $[0, 2\pi)$ liegt. Es folgt

$$\begin{aligned} z_1 &= re^{i\frac{\pi}{4}} = r(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})) = r(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}}) \\ z_2 &= re^{i\frac{5}{4}\pi} = r(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi)) = r(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt nun

$$\sqrt{2} = |\mathrm{Re}(z_1)| = |\tfrac{r}{\sqrt{2}}| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{2} = |\mathrm{Re}(z_2)| = |-\tfrac{r}{\sqrt{2}}| = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

also $r = 2$. Insgesamt also,

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

oder auch

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{und} \qquad z_2 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi}.$$

**3.** (*10 Punkte*)

**a)** (*1+2 Punkte*)

i) Die Matrixschreibweise lautet

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = b.$$

ii) Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - \frac{2}{3}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 + 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sei $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Es folgt $x_2 = \frac{t-1}{2}$ und $x_1 = 2 - t$. Die Lösungsmenge ist also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - t \\ \frac{t-1}{2} \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

**b)** (*1+1+2+1 Punkte*)

i) Die Determinante ist bsp. mit der Regel von Sarrus

$$\det(B) = 2 + 0 + 0 - 3m - 3 - 0 = -1 - 3m.$$

ii) Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 4$ findet man mit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1-4 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 + \frac{1}{3}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 4 haben somit die Form $\begin{pmatrix} t \\ -\frac{t}{3} \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \neq 0$.

iii) Das charakteristische Polynom von $B$ ist

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 6(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 6\big)$$
$$= (1-\lambda)\big(\lambda^2 - 3\lambda - 4\big).$$

Die Nullstellen davon (und somit die Eigenwerte von $B$) sind

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -1.$$

iv) Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte der Matrix, also $\det(B) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$. Die Determinante von $B$ mit $m = 3$ ist mit Teilaufgabe i) gleich $\det(B) = -1 - 3m = -10$. Es gilt also

$$\lambda_3 = \frac{\det(B)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{-10}{1 \cdot (-2)} = 5.$$

**c)** (*2 Punkte*) Rechnet man das Matrixprodukt $C \cdot C^{-1}$ aus, erhält man

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -6+3x+y & 0 & 0 \\ 3-x-y & 1 & 0 \\ -9+4x+y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit $C^{-1}$ wirklich die Inverse ist, muss das Produkt die Identitätsmatrix sein. Also muss gelten

$$\begin{cases} -6+3x+y &= 1 \\ 3-x-y &= 0 \\ -9+4x+y &= 0 \end{cases}.$$

Die ersten beiden Gleichungen zusammen addiert liefern $-3+2x = 1$, also $x = 2$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt $y = 1$. Zur Kontrolle kann man $x = 2$ und $y = 1$ in die dritte Gleichung einsetzen und erhält $0 = 0$.

**4.** (*10 Punkte*)

**a)** (*4 Punkte*) Für die kritischen Punkte muss gelten

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + 4y = 0 \\ f_y(x,y) = 4x + 3y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -2y$. Setzt man das in die zweite Gleichung ein, so folgt $-8y + 3y^2 + 4 = 0$, also $y = 2$ und $y = \frac{2}{3}$. Eingesetzt in die Gleichung $x = -2y$ findet man die dazugehörigen $x$-Werte $x = -4$ und $x = -\frac{4}{3}$. Es gibt darum zwei kritische Punkte

$$P_1 = (-4, 2) \qquad \text{und} \qquad P_2 = (-\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}).$$

Der Ausdruck $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ ist hier

$$\Delta(x,y) = 2 \cdot 6y - 4^2.$$

Somit ist $\Delta(P_1) > 0$ mit $f_{xx}(P_1) > 0$ und $\Delta(P_2) < 0$. Folglich befindet sich bei

$(-4, 2)$ ein relatives Minimum und bei $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ ein Sattelpunkt.

**b)** (*3 Punkte*) Man verwendet bsp. das Lagrangesche Multiplikatorverfahren. Die Nebenbedingung ist $\varphi(x,y) = x^2 + y - 1$. Die Hilfsfunktion ist somit

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y - 1).$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) &= y + 2\lambda x = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) &= x + \lambda = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

müssen Null sein. Zuerst versuchen wir, $\lambda$ zu eliminieren. Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda = -x$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt $y - 2x^2 = 0$, also

$$y = 2x^2.$$

Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $x^2 + 2x^2 - 1 = 0$, also $x^2 = \frac{1}{3}$. Daraus folgt

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \text{oder} \qquad x = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

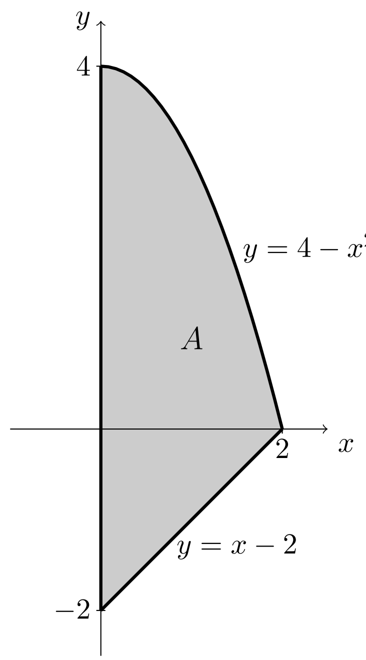
Einsetzen von $x$ in $y = 2x^2$ liefert

$$y = \frac{2}{3}.$$

Die Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $\varphi$ befinden sich somit in den Punkten $P_1 = (\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3})$ und $P_2 = (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3})$.

**c)** (*1 + 2 Punkte*)

i) Das gesuchte Gebiet ist




ii) Das zu berechnende Doppelintegral ist

$$\iint_A (x-1)\,dxdy = \int_0^2 \int_{x-2}^{4-x^2} (x-1)\,dydx = \int_0^2 (x-1)((4-x^2)-(x-2))\,dx$$
$$= \int_0^2 -x^3 + 7x - 6\,dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^2}{2} - 6x\Big|_0^2 = -2.$$

**5.** (*10 Punkte*)

**a)** (*2 Punkte*) Die homogene Differentialgleichung $y'(x) = -3y(x)$ besitzt die Lösung

$$y_h(x) = Ke^{-3x} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Der Ansatz für die inhomogene Differentialgleichung ist somit $y(x) = K(x)e^{-3x}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das die Bedingung

$$K'(x)e^{-3x} = 8 \quad \Longrightarrow \quad K(x) = \int 8e^{3x}\,dx = \frac{8}{3}e^{3x} + C.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = \Big(\frac{8}{3}e^{3x} + C\Big)e^{-3x} = \frac{8}{3} + Ce^{-3x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

**b)** (*3 Punkte*) Mit Trennung der Variablen folgt für die allgemeine Lösung

$$y'(x) = xe^{-y(x)} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Longrightarrow \int e^y dy = \int x\,dx \Longrightarrow e^y = \frac{1}{2}x^2 + C \Longrightarrow y(x) = \ln\Big(\frac{1}{2}x^2 + C\Big).$$

Wegen $0 \overset{!}{=} y(0) = \ln(C)$ muss $C = 1$ sein und somit die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \ln\Big(\frac{1}{2}x^2 + 1\Big).$$

**c)** (*5 Punkte*) Die homogene Differentialgleichung $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$ besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ mit einer doppelten reellen Lösung $\lambda_{1/2} = 3$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} = (C_1 + C_2x)e^{3x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung benutzt man den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2e^{3x},$$

es sich bei der Störfunktion um $4e^{3x}$ handelt und 3 eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Für diesen Ansatz gilt $y_p'(x) = Ae^{3x}(2x + 3x^2)$ und $y_p''(x) = Ae^{3x}(2 + 12x + 9x^2)$. Der partikuläre Ansatz ergibt eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung die Bedingung

$$Ae^{3x}(2 + 12x + 9x^2) - 6Ae^{3x}(2x + 3x^2) + 9Ax^2e^{3x} = 4e^{3x}.$$

Nach Division mit $e^{3x}$ folgt

$$A(2 + 12x + 9x^2) - 6A(2x + 3x^2) + 9Ax^2 = 4.$$

Koeffizientenvergleich liefert die Bedingung $A = 2$ Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

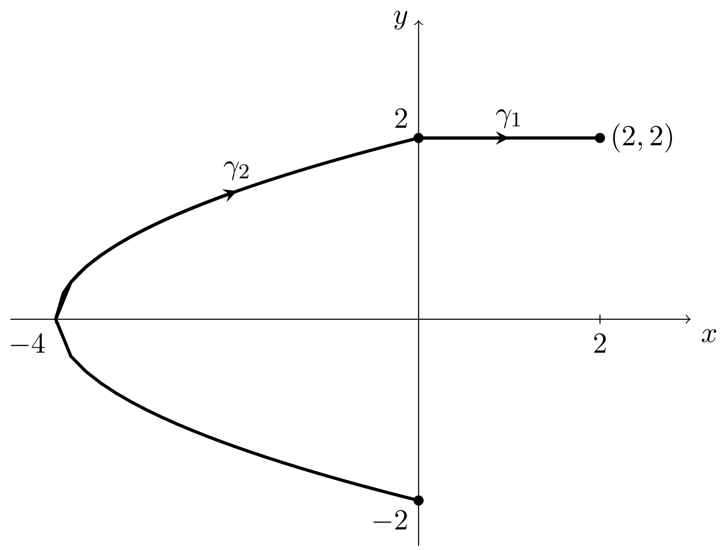
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + 2x^2 e^{3x}.$$

Wegen den Bedingungen $0 \stackrel{!}{=} y(0) = C_1$ und $0 \stackrel{!}{=} y(1) = (C_1 + C_2)e^3 + 2e^3$ folgt $C_1 = 0$ und $C_2 = -2$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = -2xe^{3x} + 2x^2 e^{3x} = 2xe^{3x}(x - 1).$$

**6.** (*10 Punkte*)

**a)** (*2 Punkte*) Die Kurven sehen wie folgt aus:




**b)** (*2 Punkte*) Mögliche Parametrisierungen sind

$$C_1: \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -2 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 3t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

**c)** (*3 Punkte*) Ortsvektor $\overrightarrow{r}(t)$ der Kurve $C_1$ aus Teilaufgabe a) in Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ einsetzen ergibt

$$\overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} te^t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor $\overrightarrow{r}(t)$ der Kurve $C_1$ wird jetzt abgeleitet und das Skalarprodukt $\overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}}$ gebildet

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = te^t + 2t.$$

Dieses Skalarprodukt muss man schliesslich in den Grenzen von $t$ integrieren

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{-2}^{1} te^t + 2t \, dt \\ &\overset{(*)}{=} \left( te^t \Big|_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} e^t \, dt \right) + t^2 \Big|_{-2}^{1} = e + 2e^{-2} - e + e^{-2} + 1 - 4 \\ &= 3e^{-2} - 3\end{aligned}$$

wobei man in $(*)$ partielle Integration braucht.

**d)** *(3 Punkte)*

Mit

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x \\ x^2 - y \end{pmatrix}$$

und der Formel von Green folgt

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) \, dA,$$

wobei $A$ das durch die Kurve $C$ eingeschlossene Gebiet ist. Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = 2x - 0 = 2x.$$

und $A$ kann geschrieben werden als

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 1 \, , \, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x \right\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA &= \int_{-2}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x} 2x \, dy dx \\ &= 2 \int_{-2}^{1} x(2 - x - x^2) \, dx = 2 \Big( x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} x^4 \Big) \Big|_{-2}^{1} \\ &= 2 (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 4 - \frac{8}{3} + 4) \\ &= -\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{9}{2}.$$