D–BIOL D–CHAB D–HEST

# Prüfung Mathematik I/II

401-0291-00L / 401-0292-00L

## Prüfungsangabe

*Bitte noch nicht umblättern!*

# Multiple Choice

**1. Aufgabe** **[40 Punkte]**

Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt Ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst **0 Punkte**. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

**Analysis:**

**MC1.** Was ist der **maximale** Definitionsbereich (Teilmenge von $\mathbb{R}$) der Funktion

$$g(x) = \sqrt[4]{\log(x)}\ ?$$

(A) $(0, \infty)$,
(B) $[1, \infty)$,
(C) $(-\infty, -1)$,
(D) $(-\infty, 0]$.

**MC2.** Sei

$$f(x) = x^x, \quad x \in (1, \infty).$$

Was ist die erste Ableitung von $f$?

(A) $f'(x) = \log(x)x^{x-1}$,
(B) $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$,
(C) $f'(x) = (\log(x) + 1)x^x$,
(D) Keine der anderen Aussagen ist wahr.

**MC3.** Welchen Wert hat der folgende Limes?

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}$$

(A) $\pi$,
(B) $1 + \pi$,
(C) $1$,
(D) Der Limes existiert nicht.

**MC4.** Sei

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^n.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) Beide Reihen konvergieren,
(B) Nur $(i)$ konvergiert,
(C) Nur $(ii)$ konvergiert,
(D) Keine der anderen Aussagen ist wahr.

**MC5.** Was ist der Wert des folgenden Integrals?

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

(A) $\frac{\log(2)}{2}$,
(B) $\log(2)$,
(C) $2\log(2)-2$,
(D) $2$.

**MC6.** Welcher Ausdruck ist gleich $\int \cos^2(x)\,dx$?

(A) $\cos(x)\sin(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx$,
(B) $\sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx$,
(C) $\cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx$,
(D) $-\sin^2(x) - \int \cos(x)\,dx$.

**MC7.** Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f'(x)\geq 0 \quad \text{und} \quad f''(x)\geq 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **immer wahr**?

(A) Das Maximum von $f$ wird an genau einen Punkt in $\mathbb{R}$ angenommen,
(B) Die Funktion $f$ ist konkav,
(C) Wenn $a<b$, dann $f(a)\leq f(b)$,
(D) Die Funktion $f$ ist monoton fallend.

**Komplexe Analysis:**

**MC8.** Sei
$$z = (1+i)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$
Welchen Wert hat $|z|$?

(A) $\frac{1}{2}$.
(B) $\sqrt{2}$.
(C) 2.
(D) $2\sqrt{2}$.

**Lineare Algebra:**

**MC9.** Betrachten Sie folgende Vektoren:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$
Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind diese Vektoren linear abhängig?

(A) $\lambda = -2$ und $\lambda = 0$,
(B) $\lambda = -2$ und $\lambda = 2$,
(C) $\lambda = 0$ und $\lambda = 2$,
(D) $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$.

**MC10.** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die Determinante von $A$ gleich...

(A) $\det A = 0$,
(B) $\det A = \lambda$,
(C) $\det A = \lambda^3$,
(D) $\det A = \lambda^3 + \lambda$.

**MC11.** Das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist gleich...

(A) $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)$,

(B) $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$,

(C) $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$,

(D) $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$.

**MC12.** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und betrachten Sie die Matrix $M = A^3$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $M$?

(A) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

(B) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(C) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(D) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**MC13.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$. Was ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$?

(A) $x = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -t+1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$, für $t \in \mathbb{R}$,

(B) $x = \begin{pmatrix} -t \\ t-1.5 \\ t-0.5 \end{pmatrix}$, für $t \in \mathbb{R}$,

(C) $x = \begin{pmatrix} -t+0.5 \\ t+1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$, für $t \in \mathbb{R}$,

(D) $x = \begin{pmatrix} t \\ -t-0.5 \\ t \end{pmatrix}$, für $t \in \mathbb{R}$.

**MC14.** Sei $A_b = \begin{pmatrix} 6 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Für welches $b$ hat $D_b$ Eigenwerte, die **nicht** auf der reellen Achse liegen?

(A) $b = -5$,

(B) $b = 0$,

(C) $b = 5$,

(D) $b = 10$.

**Gewöhnliche Differentialgleichungen:**

**MC15.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y(x) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**?

(A) $y(x) = 1$ ist die einzige konstante Lösung der Differentialgleichung,

(B) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1 \cos(3x)$ für eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$,

(C) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ für Konstanten $C_1$, $C_2 \in \mathbb{R}$,

(D) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + C_3 e^{-3x}$ für Konstanten $C_1$, $C_2$, $C_3 \in \mathbb{R}$.

**Multivariate Funktionen:**

**MC16.** Was ist die Tangentialebene von

$$x^2 + y^3 - z - 1 = 0$$

im Punkt $(2, 1, 4)$?

(A) $z = 1 + 2(x-1) + 2(y-3)$,

(B) $z = 4 + 2(x-1) + 4(y-1)$,

(C) $z = 4 + 4(x-2) + 2(y-1)$,

(D) $z = 4 + 4(x-2) + 3(y-1)$.

**MC17.** Der Flächeninhalt zwischen der Geraden $y = -x + 2$ und der Parabel $y = x^2$ ist gleich

(A) 4.5,

(B) 5.5,

(C) 6.5,

(D) 7.5.

**Mehrdimensionale Integrale:**

**MC18.** Sei $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 5,\, 0 \le y \le e^{1+x}\}$. Was ist der Flächeninhalt von $V$?

(A) $4e^3 + 5e$,

(B) $-3e^4 + 6$,

(C) $6e^5 - 4e$,

(D) $e^6 - e$.

**Linienintegrale und Oberflächenintegrale:**

**MC19.** Sei $\gamma$ die Strecke von $(0,\pi)$ bis $(-\pi,0)$. Was ist der Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma y\,dx + 2\,dy\,?$$

(A) $-\frac{3}{2}\pi^2 + \pi - 3$,

(B) $-\pi^2 + 4$,

(C) $-\pi^2 + 2\pi - 2$,

(D) $-\frac{1}{2}\pi^2 - 2\pi$.

**MC20.** Sei $\gamma$ der Bogen der kubischen Parabel $y = x^3$ von $(-2,-8)$ bis $(1,1)$. Für das Vektorfeld $\vec{F}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+4y \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \ldots$

(A) $-3$,

(B) $-1$,

(C) $13$,

(D) $16$.

**2. Aufgabe** **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) [**1 Punkt**] Finden Sie das Taylor Polynom erster Ordnung der Funktion

$$f(x) = e^x + \log(x), \quad x > 0,$$

am Punkt $x_0 = 1$.

(b) [**3 Punkte**] Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(2x)^n.$$

**Hinweis:** Sie können Resultate zu Potenzreihen verwenden.

## 3. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

In dieser Aufgabe bezeichnet $i$ die komplexe Einheit, also $i^2 = -1$, und $\bar{z}$ ist die komplex konjugierte Zahl von $z \in \mathbb{C}$.

(a) [**2 Punkte**] Sei
$$z = 3 + 3i.$$
Finden Sie die Polar-Koordinaten von $z$ und berechnen Sie den Wert von
$$\sqrt{\frac{z \cdot \bar{z}}{2}}.$$

(b) [**2 Punkte**] Sei $x \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ und $\omega \in \mathbb{C}$, sodass
$$\omega = \frac{ix + 2}{x - i}.$$
Berechnen Sie den Wert von $(x - i)(\omega - i)$ und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich.

## 4. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mu & 1 & 2 \\ 2 & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **[1 Punkt]** Sei $\mu = 0$. Berechnen Sie den reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von $A$.

(b) **[3 Punkte]** Sei $\mu = 2$. Berechnen Sie die Inverse von $A$.

**5. Aufgabe** **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) = 0.$$

(b) [**3 Punkte**] Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 3y'(x) = 18\sin(3x) \text{ mit } y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

**6. Aufgabe** **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Sei

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\right\}.$$

(a) **[1 Punkt]** Skizzieren Sie die Teilmenge $D$ in der $(x, y)$-Ebene.

(b) [**0.5 Punkte**] Berechnen Sie den Flächeninhalt von $D$.

(c) [**2.5 Punkte**] Sei $\gamma = \partial D$ der Rand des Gebietes $D$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert und sei das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

auf zwei verschiedene Arten.