D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0292-00J (Jahreskurs)

Nachname
XX

Vorname
XX

Legi-Nr.
XX-000-000

Prüfungs-Nr.
000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei f die Funktion $f(x) = 2\sin(x) - x\cos(x)$. Dann gilt für die Ableitung f'

(A) $f'(x) = x\sin(x) + \cos(x)$

(B) $f'(x) = x + x\cos(x)$

(C) $f'(x) = x\sin(x)$

(D) $f'(x) = \sin(x) - x\cos(x)$

1.MC2 [1 Punkt] Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(x) - x\cos(x)}{e^x - 1}$ ist ...

(A) -1

(B) 1

(C) -2

(D) 4

1.MC3 [1 Punkt] Sei ℓ mit $\ell(x)$ die Tangente der Funktion f mit $f(x) = x^2 e^{-x^2} + 1$ an der Stelle $x_0 = 0$. Welches $\ell(x)$ unten gehört dazu?

Hinweis: Sie müssen dafür nicht zwingend Ableitungen berechnen.

(A) $\ell(x) = 2$

(B) $\ell(x) = x/e + 2x$

(C) $\ell(x) = x/e$

(D) $\ell(x) = 1$

1.MC4 [1 Punkt] Sei $f(x) = xe^{-x} + \sin(x)$ und $T_2(x) = a_1 x - x^2$ das zugehörige 2. Taylor-Polynom an der Stelle $x_0 = 0$. Der Koeffizient a_1 ist

(A) $a_1 = 0$

(B) $a_1 = 2$

(C) $a_1 = \dfrac{1}{2}$

(D) $a_1 = -1$

1.MC5 [1 Punkt] Sei $f(x) = \ln(bx)$. Für welches b ist $\tilde{x} = 3$ ein Fixpunkt der zugehörigen Funktion f?

(A) $b = \dfrac{e^3}{3}$

(B) $b = e^3$

(C) $b = 3e^3$

(D) $b = \dfrac{1}{e^3}$

1.MC6 [1 Punkt] Sei $f(x) = ax + \sin(x)$. Für welches a ist $\widetilde{x} = \pi$ ein attraktiver Fixpunkt der zugehörigen Funktion f? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe bei $\widetilde{x} = \pi$ konvergiert gegen $\widetilde{x} = \pi$.

(A) $a = 1$

(B) $a = 2$

(C) $a = 0$

(D) $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.MC7 [1 Punkt] Sei $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t+1}dt$. Dann ist $F(4) = \ldots$

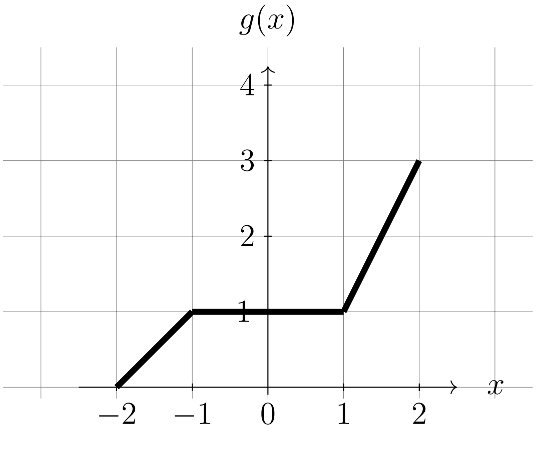
(A) $e^{5/2}$

(B) $\dfrac{5}{\ln(2)}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

1.MC8 [1 Punkt] Sei g die Funktion mit Funktionsgraphen



Für welches b ist $\displaystyle\int_{-2}^b g(x)dx = \frac{3}{2}$?

(A) $b = 1$

(B) $b = 0$

(C) $b = 2$

(D) $b = -1$

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Re}(w)$ ist der Realteil der komplexen Zahl $w = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

(A) $\mathrm{Re}(w) = 4\sqrt{2}$

(B) $\mathrm{Re}(w) = -\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

(C) $\mathrm{Re}(w) = -4\sqrt{2}$

(D) $\mathrm{Re}(w) = 2\sqrt{2}$

2.MC2 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Im}(w)$ ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $w = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

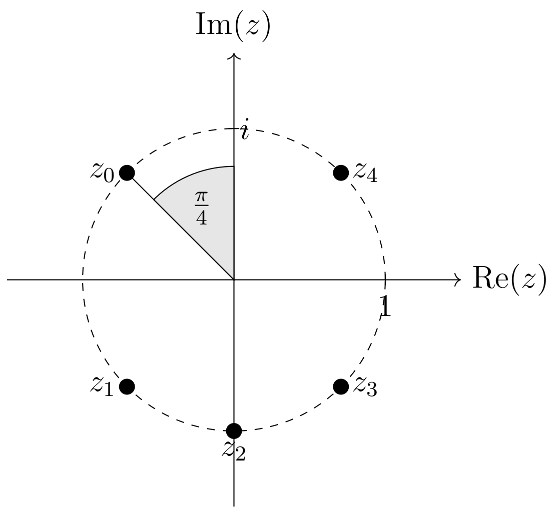
(A) $\mathrm{Im}(w) = -2\sqrt{2}$

(B) $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

(C) $\mathrm{Im}(w) = 4\sqrt{2}$

(D) $\mathrm{Im}(w) = -4\sqrt{2}$

2.MC3 [1 Punkt] Sei z_0 die unten abgebildete komplexe Zahl. Welcher der unten dargestellten Punkte z_1, z_2, z_3 oder z_4 auf dem Einheitskreis entspricht der komplexen Zahl z_0^2?



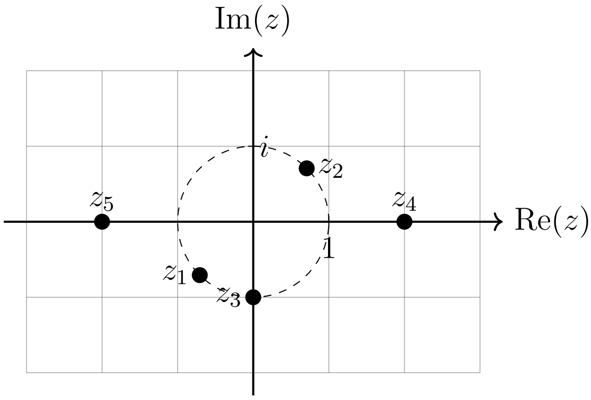
(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

2.MC4 [1 Punkt] Betrachten Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 in der komplexen Zahlenebene unten. Welche der folgenden Gleichungen passt dazu?



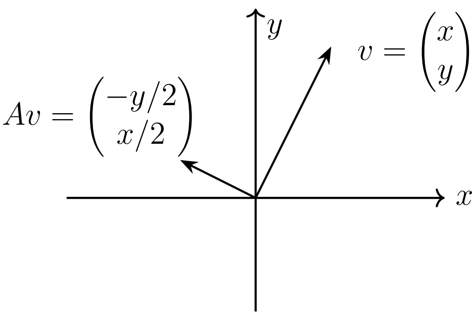
(A) $z_5 = 2z_3^2$

(B) $z_4 = \overline{z_5}$

(C) $(z_1)^2 = z_4$

(D) $z_3 = -\frac{z_4^2}{4}$

2.MC5 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



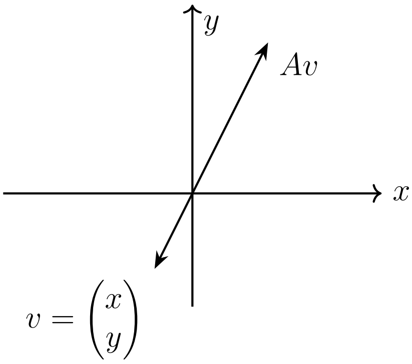
(A) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

2.MC6 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



(A) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

2.MC7 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches Y ist $v = \begin{pmatrix} -3 \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Linearen Gleichungssystem $Av = 0$?

(A) $Y = 1$
(B) $Y = 0$
(C) $Y = -2$
(D) $Y = 3$

2.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & X & X \\ 1 & 2 & X \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches X ist $\det(A) = 0$?

Hinweis: Sie müssen nicht zwingend die Determinante berechnen.

(A) $X = 4$
(B) $X = 2$
(C) $X = 6$
(D) $X = -1$

2.A1 [6 Punkte] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(i) Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 + i$ und λ_3. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert λ_3.

(ii) Sei $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mit $x \neq 0$, ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 der Matrix A. Sei

$$\widetilde{w}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = A^8 w_2.$$

Bestimmen Sie $\dfrac{\widetilde{x}}{x}$.

Hinweis: Ein Berechnen der Koordinatenwerte ist nicht erforderlich.

(iii) Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Startvektor einer Populationsentwicklung $v_{k+1} = Av_k$. Bestimmen Sie v_8.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Für welches a ist die Funktion y mit $y(x) = 4\sin(ax)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y''(x) = -4y(x)$?

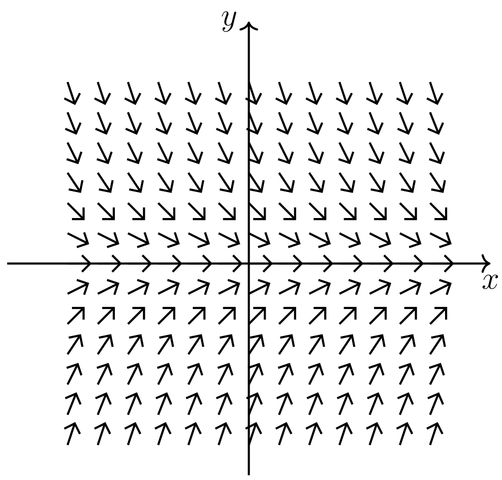
(A) $a = -2$

(B) $a = 4$

(C) $a = -4$

(D) $a = \frac{1}{2}$

3.MC2 [1 Punkt] Welche Differentialgleichung passt zu folgendem Richtungsfeld?



(A) $y'(x) = -(y(x))^2$

(B) $y'(x) = e^{y(x)}$

(C) $y'(x) = (y(x))^2$

(D) $y'(x) = -y(x)$

3.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP):

$$y'(x) = y(x)(y(x) - 3)(7 - y(x)), \quad y(0) = 2.$$

Dann ist $\lim_{x\to\infty} y(x) = \dots$

(A) 3

(B) 0

(C) ∞

(D) -1

3.MC4 [1 Punkt] Sei $y' = Ay$ das System mit $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von β hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\beta = \frac{1}{2}$

(B) $\beta = 2$

(C) $\beta = -4$

(D) $\beta = -2$

3.MC5 [1 Punkt] Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(x) + y'(x) - ay(x) = 0$?

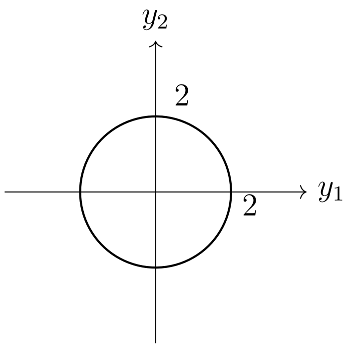
(A) $a = 2$

(B) $a = -2$

(C) $a = 1$

(D) $a = -1$

3.MC6 [1 Punkt] Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ mit $y'(t) = Ay(t)$ und $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welche Matrix A passt zu folgender Lösungskurve des Systems?



Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel jeweils die Eigenwerte der Matrix A.

(A) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.MC7 [**1 Punkt**] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert $y(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\lambda = 1$

(B) $\lambda = 2$

(C) $\lambda = 3$

(D) $\lambda = \frac{1}{4}$.

3.MC8 [**1 Punkt**] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $y(t) = e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\alpha = -2$

(B) $\alpha = 2$

(C) $\alpha = -3$

(D) $\alpha = 1$

3.A1 [**6 Punkte**] Sei $y'(x) = \dfrac{y(x)^2}{x+1}$ für $x \geq 0$.

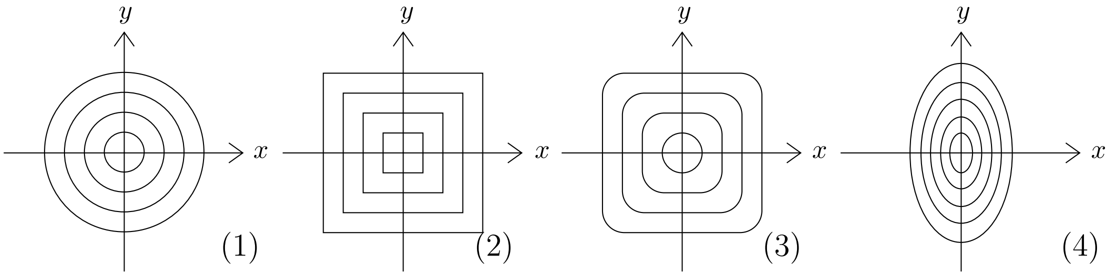
(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Aufgabe 4

4.MC1 [1 Punkt] Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (Höhenlinien) der Funktion f?



(A) (1)

(B) (2)

(C) (3)

(D) (4)

4.MC2 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x\sin(y) + y\cos(x)$. Dann ist der Gradient $\nabla g(x, y) = \ldots$

(A) $\begin{pmatrix} \sin(y) - y\sin(x) \\ x\cos(y) + \cos(x) \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} x\sin(y) \\ y\cos(x) \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \cos(x) - \sin(y) \\ \cos(x) + \sin(y) \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} y\sin(x) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$

4.MC3 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x\sin(y) + y\cos(x)$. Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\ell(x, y) = b - (\pi + 1)y$ die Tangentialebene von g an der Stelle $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$?

Hinweis: Sie müssen nicht zwingend ableiten.

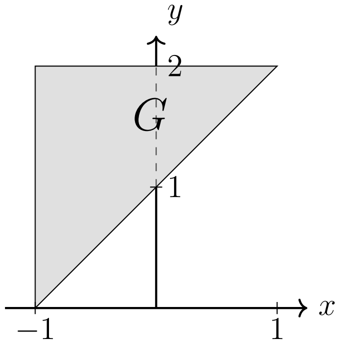
(A) $b = \pi$

(B) $b = \sqrt{\pi}$

(C) $b = -\pi$

(D) $b = \pi^2$

4.MC4 [1 Punkt] Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks G unten?



(A) $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{2} dydx$

(B) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dydx$

(C) $\int_{-1}^{1}\int_{x+1}^{2} dydx$

(D) $\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{x-1} dydx$

4.MC5 [1 Punkt] Sei $\widetilde{G}$ der Teil des Gebiets G in **4.MC4** oben, der links von der y-Achse liegt, also ist $x \leq 0$. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $I = \int\int_{\widetilde{G}} Ky \; dA = 11$?

(A) $K = 6$

(B) $K = 3$

(C) $K = 1$

(D) $K = -6$

4.MC6 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$. Der Punkt $(1,2)$ ist kritisch und ...

(A) ein lokales Maxmimum

(B) ein lokales Minimum

(C) Sattelpunkt

(D) Keines von diesen

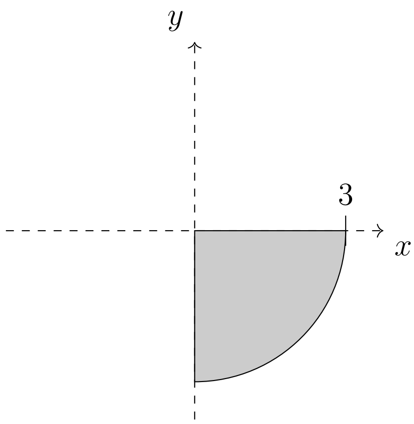
4.MC7 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 12$. Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 18?

(A) $(x,y) = (3,1)$
(B) $(x,y) = (1,3)$
(C) $(x,y) = (-1,-2)$
(D) $(x,y) = (1,-2)$

4.MC8 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x,y) = x\sin(y) - y$. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x,y)-Ebene, auf der $P = (0, \pi/2)$ liegt. Die Steigung m der Tangente an γ in P ist

(A) $m = \pi$
(B) $m = 1$
(C) $m = \dfrac{\pi}{2}$
(D) $m = 0$

4.A1 [4 Punkte] Sei P die graue Fläche in der folgenden Abbildung



(i) Vervollständigen Sie durch Angabe von R_a und φ_2 die Beschreibung der Fläche P in der Form

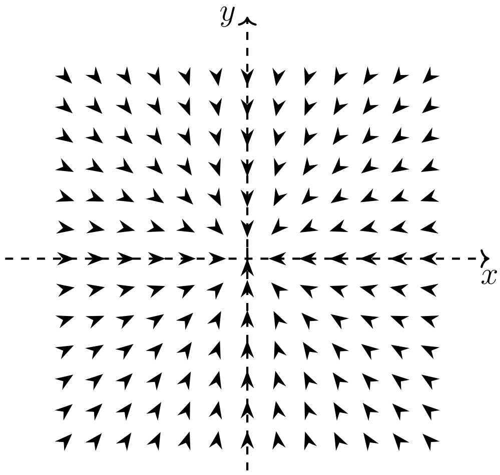
$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),\ r \in [0, R_a],\ \varphi \in [\varphi_1, 2\pi] \right\}.$$

(ii) Bestimmen Sie $I = \iint_P e^{(x^2+y^2)} dA$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

Aufgabe 5

5.MC1 [1 Punkt] Welches Vektorfeld K mit $K(x,y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

(B) $K(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

(C) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$

(D) $K(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

5.MC2 [1 Punkt] Welches der folgenden Vektorfelder K mit $K(x,y)$ ist konservativ?

(A) $K(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \cos(x) \\ e^x \end{pmatrix}$

(B) $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$

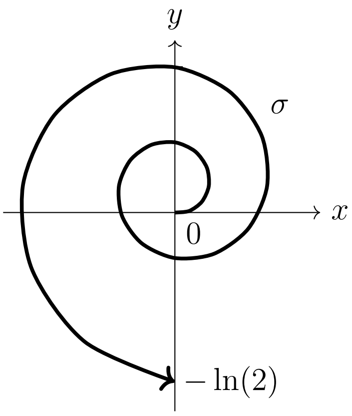
(C) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -ye^x \\ xe^y \end{pmatrix}$

(D) $K(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$

5.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ -e^{x-y} \end{pmatrix}$. Für welches der folgenden f mit $f(x,y)$ ist der Gradient $\nabla f(x,y) = K(x,y)$?

(A) $f(x,y) = e^{-x+y}$
(B) $f(x,y) = e^{x-y}$
(C) $f(x,y) = e^{x+y}$
(D) $f(x,y) = xe^{y}$

5.MC4 [1 Punkt] Gegeben seien wieder das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ -e^{x-y} \end{pmatrix}$ aus **5.MC3** und die ebene Kurve σ unten. Die Arbeit $A = \int_\sigma K \cdot d\gamma$ ist dann …



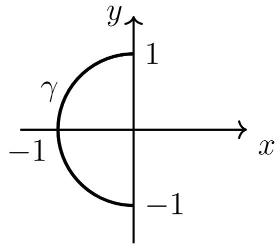
(A) $A = \ln(2)$
(B) $A = \frac{1}{2}$
(C) $A = e^2$
(D) $A = 1$

5.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld $K(x,y)$ mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$.

Dann ist $\operatorname{div}(K)(x,y) = \ldots$

(A) $2xy + e^x \cos(y)$
(B) $x^2 + e^x \sin(y)$
(C) $x^2 + e^x \cos(y)$
(D) $2xy + e^x \sin(y)$

5.MC6 [1 Punkt] Die Kurve γ (auf einer Kreislinie) ist in der folgenden Abbildung gegeben.



Welche Angaben unten geben eine Parametrisierung der Kurve γ von $(0, 1)$ nach $(0, -1)$?

(A) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(B) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(C) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(D) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(-\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

5.MC7 [1 Punkt] Für γ aus **5.MC6** und $I = \int_\gamma \frac{1}{\ln(x^2 + y^2) + 1} ds$ gilt $I = \ldots$

(A) $\frac{\pi}{\ln(2)}$

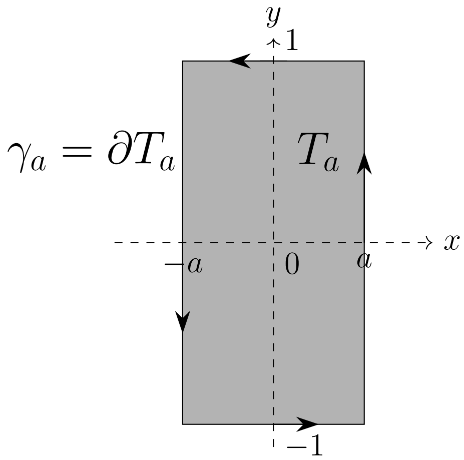
(B) $\frac{\pi^2}{2}$

(C) π

(D) $\frac{2\pi}{\ln(2)}$

5.MC8 [1 Punkt] Sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x y + 5y \end{pmatrix}$. Gegeben sei das ebene Gebiet T_a mit Randkurve $\partial T_a = \gamma_a$, wie in der folgenden Abbildung (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -a \leq x \leq a, -1 \leq y \leq 1\}$ von $a > 0$ ab.

Für welches $a \geq 0$ ist $\oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds = 60$?



(A) $a = 10$
(B) $a = 15$
(C) $a = 30$
(D) $a = 3$

5.A1 [4 Punkte] Sei das von $b > 0$ abhängige Vektorfeld K_b mit $K_b(x,y) = \begin{pmatrix} by^2 - b^2 y + 2yx \\ (by + x)^2 \end{pmatrix}$ gegeben. Sei T_a das Gebiet aus **5.MC8** oben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$, in Abhängigkeit von a und b. **Hinweis:** Eine Parametrisierung der Kurve ist nicht notwendig.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1.**