Aufgaben und Lösungsvorschlag Gruppe A

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei f die Funktion $f(x) = 2\sin(x) - x\cos(x)$. Dann gilt für die Ableitung f'

(A) **TRUE:** $f'(x) = x\sin(x) + \cos(x)$

(B) $f'(x) = x\sin(x)$

(C) $f'(x) = x + x\cos(x)$

(D) $f'(x) = \sin(x) - x\cos(x)$

Lösung:

Mit der Produktregel folgt

$$f'(x) = 2\cos(x) - (x\cos(x))' = 2\cos(x) - \Big(x(-\sin(x)) + \cos(x)\Big) = x\sin(x) + \cos(x).$$

1.MC2 [1 Punkt] Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(x) - x\cos(x)}{e^x - 1}$ ist ...

(A) 4

(B) **TRUE:** 1

(C) -1

(D) -2

Lösung:

Mit der Regel von de L'Hospital und der Ableitung oben ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - x\cos(x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x) + \cos(x)}{e^x} = \frac{1}{1} = 1.$$

1.MC3 [1 Punkt] Sei ℓ mit $\ell(x)$ die Tangente der Funktion f mit $f(x) = x^2 e^{-x^2} + 1$ an der Stelle $x_0 = 0$. Welches $\ell(x)$ unten gehört dazu?

Hinweis: Sie müssen dafür nicht zwingend Ableitungen berechnen.

(A) $\ell(x) = x/e$

(B) $\ell(x) = x/e + 2x$

(C) $\ell(x) = 2$

(D) **TRUE:** $\ell(x) = 1$

Lösung:

Es muss $\ell(0) = f(0) = 1$ gelten. Das ist nur der Fall für $\ell(x) = 1$.

Alternativ: Es gilt $f'(x_0) = 0$.

Also ist $\ell(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0x + 1 = 1$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $f(x) = xe^{-x} + \sin(x)$ und $T_2(x) = a_1 x - x^2$ das zugehörige 2. Taylor-Polynom an der Stelle $x_0 = 0$. Der Koeffizient a_1 ist

(A) **TRUE:** $a_1 = 2$

(B) $a_1 = \frac{1}{2}$

(C) $a_1 = 0$

(D) $a_1 = -1$

Lösung:

Es gilt $T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Mit $f'(x) = e^{-x}(-x + e^x \cos(x) + 1)$ folgt, dass $f'(0) = 2$. Damit ist $T_2(x) = 2x - x^2$ und damit $a_1 = 2$.

1.MC5 [1 Punkt] Sei $f(x) = \ln(bx)$. Für welches b ist $\widetilde{x} = 3$ ein Fixpunkt der zugehörigen Funktion f?

(A) **TRUE:** $b = \frac{e^3}{3}$

(B) $b = \frac{1}{e^3}$

(C) $b = e^3$

(D) $b = 3e^3$

Lösung:

Es gilt $f(3) = 3$ genau dann, wenn $\ln(b3) = 3 \iff b3 = e^3 \iff b = \frac{e^3}{3}$.

1.MC6 [1 Punkt] Sei $f(x) = ax + \sin(x)$. Für welches a ist $\widetilde{x} = \pi$ ein attraktiver Fixpunkt der zugehörigen Funktion f? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe bei $\widetilde{x} = \pi$ konvergiert gegen $\widetilde{x} = \pi$.

(A) $a = -\frac{1}{2}$.

(B) $a = 0$

(C) $a = 2$

(D) **TRUE:** $a = 1$

Lösung:

Es muss $|f'(\pi)| < 1$ gelten. Da $f'(x) = a + \cos(x)$ ist, muss also

$$|f'(\pi)| = |a + \cos(\pi)| = |a - 1| < 1$$

gelten. Also ilt $0 < a < 2$, und damit kann nur $a = 1$ die korrekte Antwort sein.

1.MC7 [1 Punkt] Sei $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t+1} dt$. Dann ist $F(4) = \ldots$

(A) **TRUE:** $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

(B) $\frac{5}{\ln(2)}$

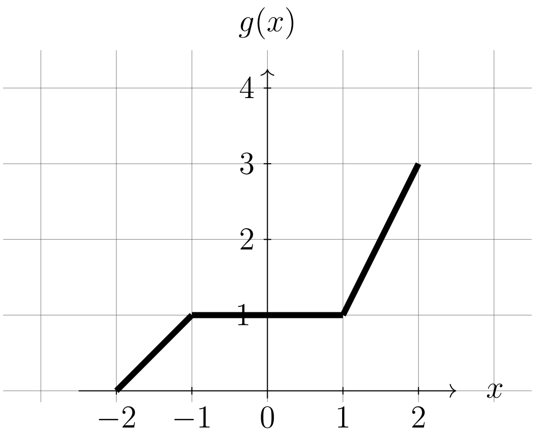
(C) $e^{5/2}$

(D) $\frac{2}{5}$

Lösung:

Es gilt
$$F(4) = \int_1^4 \frac{1}{t+1} dt = \Big[\ln(t+1)\Big]_{t=1}^{t=4} = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

1.MC8 [1 Punkt] Sei g die Funktion mit Funktionsgraphen



Für welches b ist $\int_{-2}^b g(x)dx = \frac{3}{2}$?

(A) $b = 2$

(B) **TRUE:** $b = 0$

(C) $b = 1$

(D) $b = -1$

Lösung:

Das Integral ist die Fläche, die zwischen -2 und b welche vom Graphen von g und der x-Achse aufgespannt wird. Mit Zählen der Kästchen, die rechts von $x = -2$ zwischen der Funktion g und der x-Achse liegen, schliesst man, dass $b = 0$ sein muss.

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Re}(w)$ ist der Realteil der komplexen Zahl $w = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

(A) **TRUE:** $\mathrm{Re}(w) = 2\sqrt{2}$
(B) $\mathrm{Re}(w) = 4\sqrt{2}$
(C) $\mathrm{Re}(w) = -4\sqrt{2}$
(D) $\mathrm{Re}(w) = -\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

Lösung:

Es gilt $w = 4(\cos(\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 4(1/\sqrt{2} - i1/\sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} - i4/\sqrt{2}$ und damit ist $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

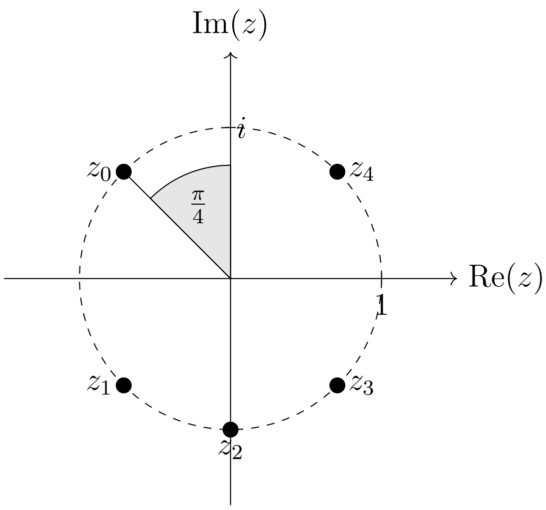
2.MC2 [1 Punkt] Welche Zahl $\mathrm{Im}(w)$ ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $w = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

(A) $\mathrm{Im}(w) = 4\sqrt{2}$
(B) $\mathrm{Im}(w) = -4\sqrt{2}$
(C) $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$
(D) **TRUE:** $\mathrm{Im}(w) = -2\sqrt{2}$

Lösung:

Es gilt $w = 4(\cos(\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 4(1/\sqrt{2} - i1/\sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} - i4/\sqrt{2}$ und damit ist $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$.

2.MC3 [1 Punkt] Sei z_0 die unten abgebildete komplexe Zahl. Welcher der unten dargestellten Punkte z_1, z_2, z_3 oder z_4 auf dem Einheitskreis entspricht der komplexen Zahl z_0^2?



(A) z_1

(B) **TRUE:** z_2

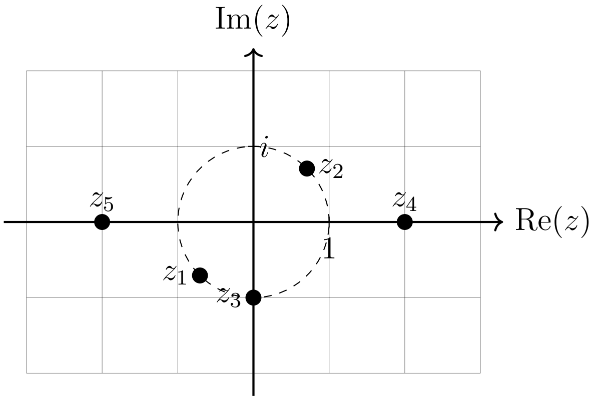
(C) z_3

(D) z_4

Lösung:

Da z_0 auf dem Einheitskreis liegt, kann man leicht ablesen, dass $z_0 = e^{i3\pi/4}$ ist. Damit muss also $z_0^2 = e^{i3\pi/2} = z_2$ sein.

2.MC4 [1 Punkt] Betrachten Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 in der komplexen Zahlenebene unten. Welche der folgenden Gleichungen passt dazu?



(A) $z_4 = \overline{z_5}$

(B) $(z_1)^2 = z_4$

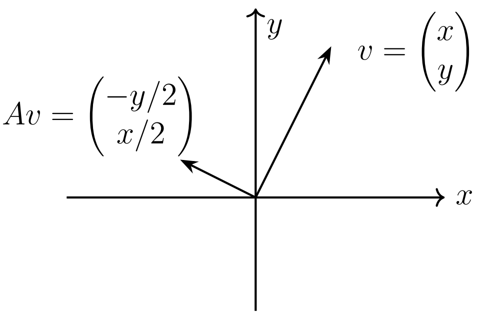
(C) $z_3 = -\frac{z_4^2}{4}$

(D) **TRUE:** $z_5 = 2z_3^2$

Lösung:

Die einzige korrekte Antwort ist $z_5 = 2z_3^2$. Denn um das Produkt $2z_3^2$ zu berechnen, müssen wir lediglich den Winkel von z_3 verdoppeln und den Radius um den Faktor 2 strecken. Anschaulich muss das also dem Punkt z_5 entsprechen.

2.MC5 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



(A) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

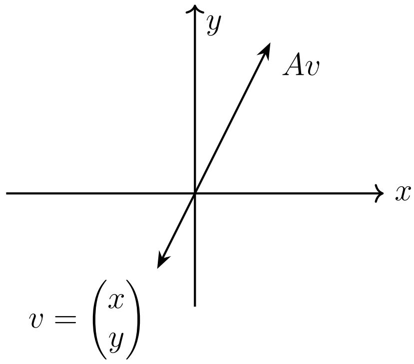
(C) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Da $\begin{pmatrix} -y/2 \\ x/2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ergibt Ausrechnen der rechten Seite, dass dies nur für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ gelten kann.

2.MC6 [1 Punkt] Welche Matrix A passt zur Abbildung unten?



(A) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Im Bild sehen wir $Av = \lambda v$ für $\lambda < -1$. Also ist v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda < -1$. Die korrekte Antwort ist also $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, da dies die einzige Matrix ist, welche einen reellen Eigenwert besitzt, der strikt kleiner als -1 ist.

2.MC7 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches Y ist $v = \begin{pmatrix} -3 \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Linearen Gleichungssystem $Av = 0$?

(A) $Y = -2$

(B) **TRUE:** $Y = 0$

(C) $Y = 3$

(D) $Y = 1$

Lösung:

Die erste Koordinate des Vektors Av ist $2(-3) + 4Y + 6$. Also muss $-6 + 4Y + 6 = 0$ gelten und somit $Y = 0$. Dann sind auch die beiden anderen Koordinatengleichungen erfüllt.

2.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & X & X \\ 1 & 2 & X \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Für welches X ist $\det(A) = 0$?

Hinweis: Sie müssen nicht zwingend die Determinante berechnen.

(A) $X = 2$

(B) $X = 6$

(C) $X = -1$

(D) **TRUE:** $X = 4$

Lösung:

Man sieht, dass für $X = 4$, die linke Spalte und die mittlere Spalte linear abhängig sind, also ist $\det(A) = 0$ für $X = 4$. Alternativ berechnet sich $\det(A) = 3X^2 - 21X + 36$, und für $\det(A) = 0$ muss $X = 3$ oder $X = 4$ gelten.

2.A1 [6 Punkte] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(i) Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 + i$ und λ_3. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert λ_3.

Lösung:

Da das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten hat, ist die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda_2}$ auch Eigenwert der Matrix, und somit gilt $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 1 - i$.

(ii) Sei $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mit $x \neq 0$, ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 der Matrix A. Sei

$$\widetilde{w}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = A^8 w_2.$$

Bestimmen Sie $\dfrac{\widetilde{x}}{x}$.

Hinweis: Ein Berechnen der Koordinatenwerte ist nicht erforderlich.

Lösung:

Da w_2 Eigenvektor zu λ_2 ist, erfüllt $Aw_2 = \lambda_2 w_2$. Somit also

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \widetilde{w}_2 = A^8 w_2 = (\lambda_2)^8 w_2 = (\lambda_2)^8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir $\lambda_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, so gilt $(\lambda_2)^4 = -4$, und damit

$$\frac{\widetilde{x}}{x} = (\lambda_2)^8 = 16.$$

(iii) Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Startvektor einer Populationsentwicklung $v_{k+1} = Av_k$. Bestimmen Sie v_8.

Lösung:

Da A drei paarweise verschiedene Eigenwerte hat, sind die drei zugehörigen Eigenvektoren w_1, w_2 und w_3 linear unabhängig. Es gibt also $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ so, dass

$$v_0 = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3.$$

Da aus *(ii)* bekannt ist, dass $A^8 w_2 = 16 w_2$ gilt, ergibt sich auch $A^8 w_3 = 16 w_3$, da $(\lambda_3)^8 = (\overline{\lambda_2})^8 = \overline{(\lambda_2)^8} = 16$. Also ist mit $(\lambda_1)^8 = 16$ auch

$$v_8 = A^8 v_0 = c_1 A^8 w_1 + c_2 A^8 w_2 + c_3 A^8 w_3 = 16 c_1 w_1 + 16 c_2 w_2 + 16 c_3 w_3 = 16 v_0.$$

Alternatives Punkteschema: jeder korrekte Eintrag gibt je **(1P)**.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Für welches a ist die Funktion y mit $y(x) = 4\sin(ax)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y''(x) = -4y(x)$?

(A) **TRUE:** $a = -2$

(B) $a = \frac{1}{2}$

(C) $a = -4$

(D) $a = 4$

Lösung:

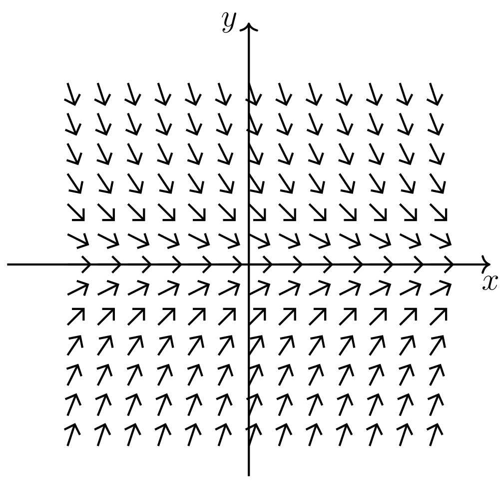
Zweimal ableiten ergibt

$$y''(x) = -4a^2\sin(ax) = -a^2 y(x).$$

Damit

$$-a^2 y(x) = -4y(x) \iff a = \pm 2.$$

3.MC2 [1 Punkt] Welche Differentialgleichung passt zu folgendem Richtungsfeld?



(A) **TRUE:** $y'(x) = -y(x)$

(B) $y'(x) = e^{y(x)}$

(C) $y'(x) = (y(x))^2$

(D) $y'(x) = -(y(x))^2$

Lösung:

Da das Richtungsfeld nach oben zeigt wenn $y(x) < 0$ ist und nach unten wenn $y(x) > 0$, kann nur $y'(x) = -y(x)$ korrekt sein.

3.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP):

$$y'(x) = y(x)(y(x)-3)(7-y(x)), \quad y(0) = 2.$$

Dann ist $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ldots$

(A) ∞

(B) 3

(C) -1

(D) **TRUE:** 0

Lösung:

Es gibt drei Fixpunkte $y_{\infty,1} = 0$, $y_{\infty,2} = 3$, $y_{\infty,3} = 7$. Für $y(0) = 2$ ist $y'(0) < 0$, also nähert sich $y(x)$ dem Fixpunkt $y_{\infty,1} = 0$ an.

3.MC4 [1 Punkt] Sei $y' = Ay$ das System mit $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von β hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\beta = 2$

(B) **TRUE:** $\beta = \dfrac{1}{2}$

(C) $\beta = -4$

(D) $\beta = -2$

Lösung:

Stationäre Lösungen sind Lösungen mit $0 = y' = Ay$. Daher muss $\det(A) = 8\beta - 4 \stackrel{!}{=} 0$ gelten. Also ist $\beta = \dfrac{1}{2}$.

3.MC5 [1 Punkt] Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(x) + y'(x) - ay(x) = 0$?

(A) $a = 1$

(B) $a = -2$

(C) **TRUE:** $a = 2$

(D) $a = -1$

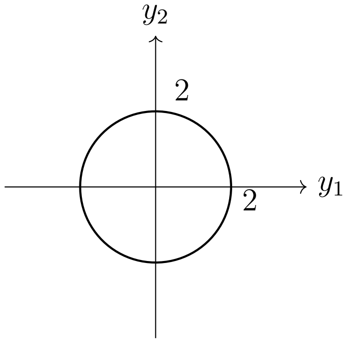
Lösung:

Mit der charakteristischen Gleichung muss $\lambda^2 + \lambda - a = 0 \stackrel{!}{=} (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ gelten. Die rechte Seite wird $\lambda^2 + \lambda - a \stackrel{!}{=} \lambda^2 + \lambda - 2$ und damit ist $a = 2$.

Alternativ: Es gilt $y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$ und $y''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$. Damit also

$$y''(x) + y'(x) - ay(x) = (C_1 + C_1 - aC_1)e^x + (4C_2 - 2C_2 - aC_2)e^{-2x} = 0 \iff a = 2.$$

3.MC6 [1 Punkt] Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ mit $y'(t) = Ay(t)$ und $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welche Matrix A passt zu folgender Lösungskurve des Systems?



Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel jeweils die Eigenwerte der Matrix A.

(A) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Durch Ausschlussverfahren mit Einsetzen von Punkten auf der Kurve bleibt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Mit einer eleganteren Argumentation folgt, dass nur $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ komplexe Eigenwerten hat. (Hier sind es $\pm i$). Daher kann nur diese Matrix eine periodische kreisförmige Lösungskurve definieren.

3.MC7 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert $y(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\lambda = 1$

(B) **TRUE:** $\lambda = 2$

(C) $\lambda = \frac{1}{4}$.

(D) $\lambda = 3$

Lösung:

Es gilt $e^{\lambda t}\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = y'(t) = Ay(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit muss $\lambda = 2$ sein.

3.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $y(t) = e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$?

(A) $\alpha = 2$

(B) $\alpha = -3$

(C) **TRUE:** $\alpha = 1$

(D) $\alpha = -2$

Lösung:

Es gilt $e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = y'(t) = Ay(t) = e^{t}\begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit muss $\alpha = 1$ sein.

3.A1 [6 Punkte] Sei $y'(x) = \dfrac{y(x)^2}{x+1}$ für $x \geq 0$.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

Lösung:

Man schreibt zunächst

$$\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x+1}dx.$$

Durch integrieren beider Seiten erhält man

$$-\frac{1}{y} + C' = \int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1) + C''.$$

Da nun

$$-\frac{1}{y} = \ln(x+1) + C$$

ist

$$y = -\frac{1}{\ln(x+1)+C}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Lösung:

Es gilt

$$2 = y(0) = -\frac{1}{\ln(0+1)+C} = -\frac{1}{C}.$$

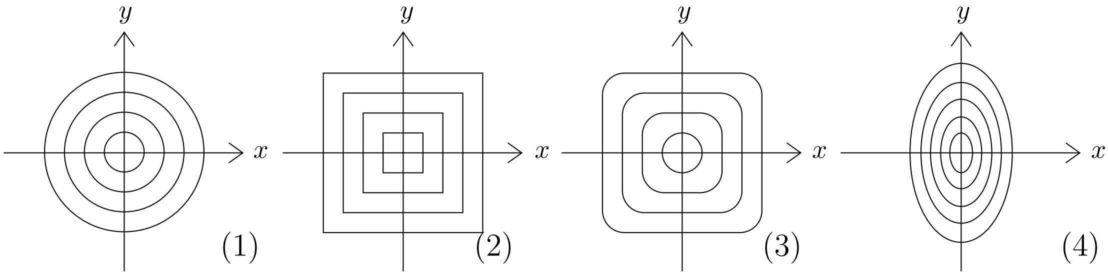
Also muss $C = -\frac{1}{2}$ gelten und damit

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(x+1)-\frac{1}{2}}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Aufgabe 4

4.MC1 [1 Punkt] Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (Höhenlinien) der Funktion f?



(A) **TRUE:** (1)
(B) (2)
(C) (3)
(D) (4)

Lösung:

Die Lösung ist (1).

4.MC2 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x\sin(y) + y\cos(x)$. Dann ist der Gradient $\nabla g(x, y) = \ldots$

(A) $\begin{pmatrix} x\sin(y) \\ y\cos(x) \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} y\sin(x) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $\begin{pmatrix} \sin(y) - y\sin(x) \\ x\cos(y) + \cos(x) \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \cos(x) - \sin(y) \\ \cos(x) + \sin(y) \end{pmatrix}$

Lösung:

Es gelten $g_x(x, y) = \sin(y) - y\sin(x)$ und $g_y(x, y) = x\cos(y) + \cos(x)$. Damit also

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y) - y\sin(x) \\ x\cos(y) + \cos(x) \end{pmatrix}.$$

4.MC3 [1 Punkt] Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x\sin(y) + y\cos(x)$. Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\ell(x, y) = b - (\pi + 1)y$ die Tangentialebene von g an der Stelle $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$?

Hinweis: Sie müssen nicht zwingend ableiten.

(A) $b = -\pi$

(B) **TRUE:** $b = \pi^2$

(C) $b = \pi$

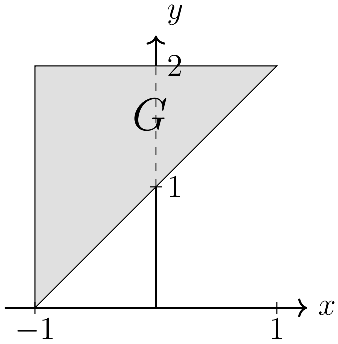
(D) $b = \sqrt{\pi}$

Lösung:

Es gilt $b - (\pi + 1)\pi = \ell(\pi, \pi) \stackrel{!}{=} g(\pi, \pi) = \pi \sin(\pi) + \pi \cos(\pi) = 0 + -\pi = -\pi$. Damit also $b = \pi^2$.

Alternativ: Die Tangentialebene von g an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ist der Graph der Funktion $\ell(x, y) = g(\pi, \pi) + g_x(\pi, \pi)(x - \pi) + g_y(\pi, \pi)(y - \pi)$. Also muss $b = g(\pi, \pi) - \pi g_y(\pi, \pi) = -\pi - \pi(-\pi - 1) = \pi^2$ sein.

4.MC4 [1 Punkt] Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks G unten?



(A) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dydx$

(B) **TRUE:** $\int_{-1}^{1}\int_{x+1}^{2} dydx$

(C) $\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{x-1} dydx$

(D) $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{2} dydx$

Lösung:

Für die Fläche gilt, dass für jedes $-1 \leq x \leq 1$ der y-Wert dann $x+1 \leq y \leq 2$ erfüllt. Die Fläche G hat den Inhalt $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$, und das ergibt auch $\int_{-1}^{1}\int_{x+1}^{2} dydx = 2$. Alle anderen Integrale sind $\neq 2$.

4.MC5 [1 Punkt] Sei $\widetilde{G}$ der Teil des Gebiets G in **4.MC4** oben, der links von der y-Achse liegt, also ist $x \leq 0$. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $I = \int\int_{\widetilde{G}} Ky\, dA = 11$?

(A) **TRUE:** $K = 6$

(B) $K = 3$

(C) $K = 1$

(D) $K = -6$

Lösung:

Da $\widetilde{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, x+1 \leq y \leq 2\}$, gilt

$$I = \int\int_{\widetilde{G}} Ky\, dA = \int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{2} Ky\, dydx = K\int_{-1}^{0}\left(2 - \frac{(x+1)^2}{2}\right)dx$$
$$= K\left(2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx\right) = K\left(2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{x=-1}^{x=0}\right) = K\left(2 - \frac{1}{6}\right) = K\frac{11}{6}.$$

Damit ist $I = 11$ genau dann, wenn $K = 6$.

4.MC6 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$. Der Punkt $(1, 2)$ ist kritisch und ...

(A) **TRUE:** ein lokales Minimum

(B) Sattelpunkt

(C) ein lokales Maxmimum

(D) Keines von diesen

Lösung:

Es gelten $h_x = 2x - 2, h_y = 2y - 4$ und damit

$$h_{xx} = 2, \quad h_{xy} = h_{yx} = 0, \quad h_{yy} = 2.$$

und weiter $D = D(1, 2) = h_{xx}(1, 2)h_{yy}(1, 2) - (h_{xy}(1, 2))^2 = 4 > 0$ und $h_{xx}(1, 2) = 2 > 0$. Also ist $(1, 2)$ ein lokales Minimum.

4.MC7 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 12$. Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 18?

(A) $(x, y) = (3, 1)$
(B) $(x, y) = (1, -2)$
(C) **TRUE:** $(x, y) = (-1, -2)$
(D) $(x, y) = (1, 3)$

Lösung:

Die Lösung ist $(x, y) = (-1, -2)$. Für alle anderen Punkte ist $h(x, y) \neq 18$.

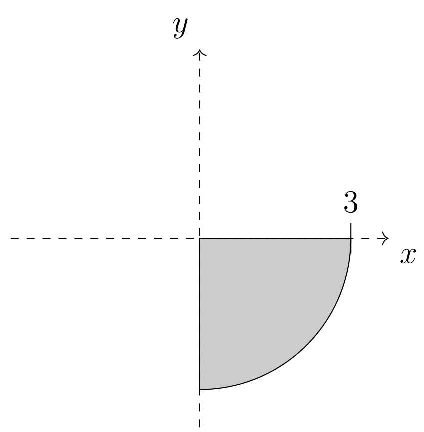
4.MC8 [1 Punkt] Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y) = x \sin(y) - y$. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x, y)-Ebene, auf der $P = (0, \pi/2)$ liegt. Die Steigung m der Tangente an γ in P ist

(A) $m = \dfrac{\pi}{2}$
(B) $m = \pi$
(C) **TRUE:** $m = 1$
(D) $m = 0$

Lösung:

Mit impliziter Differentiation ist $y_0'(x_0) = -\dfrac{h_x(x_0, y_0)}{h_y(x_0, y_0)} = -\dfrac{\sin(y_0)}{x_0 \cos(y_0) - 1}$ die Steigung der Tangente an der Kurve γ in (x_0, y_0) ist. Mit Einsetzen von $(x_0, y_0) = (0, \pi/2)$ ergibt sich $m = 1$.

4.A1 [4 Punkte] Sei P die graue Fläche in der folgenden Abbildung



(i) Vervollständigen Sie durch Angabe von R_a und φ_2 die Beschreibung der Fläche P in der Form

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)),\ r \in [0, R_a],\ \varphi \in [\varphi_1, 2\pi] \right\}.$$

Lösung:

Eine geeignete Parametrisierung ist

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),\ r \in [0, 3],\ \varphi \in [3\pi/2, 2\pi]\right\}.$$

Also $R_a = 3$ und $\varphi_1 = 3\pi/2$.

(ii) Bestimmen Sie $I = \iint_P e^{(x^2+y^2)} dA$.

Lösung:

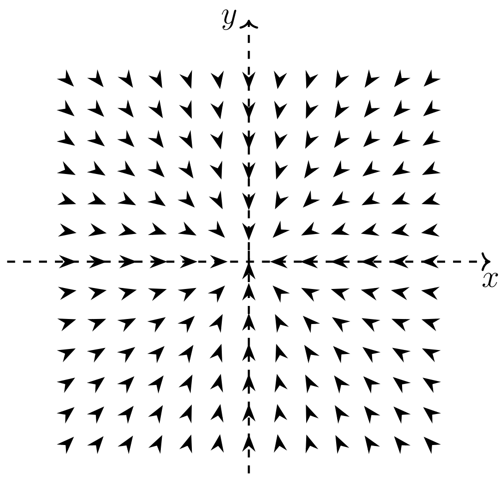
Mit Parametrisierung folgt, dass $I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^3 e^{r^2} r dr d\varphi$. Also ist

$$I = \frac{\pi}{4} \int_0^3 e^{r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \left[e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=3} = \frac{\pi}{8} \left(e^9 - 1\right) = \frac{(e^9 - 1)\pi}{8}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

Aufgabe 5

5.MC1 [1 Punkt] Welches Vektorfeld K mit $K(x, y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

(C) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

(D) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Da die Pfeile immer in den Ursprung des Koordinatensystems zeigen, kann nur

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

korrekt sein.

5.MC2 [1 Punkt] Welches der folgenden Vektorfelder K mit $K(x, y)$ ist konservativ?

(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -ye^x \\ xe^y \end{pmatrix}$

(B) $K(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$

(C) $K(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$

(D) **TRUE:** $K(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \cos(x) \\ e^x \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Vektorfelder sind auf der ganzen Ebene definiert, und für $K(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ist konservativ damit äquivalent zu $P_y = Q_x$. Rechne im Fall $K(x,y) = (ye^x + \cos(x), e^x)$, dass dann $P_y - Q_x = e^x - e^x = 0$ und sonst $\neq 0$ gilt.

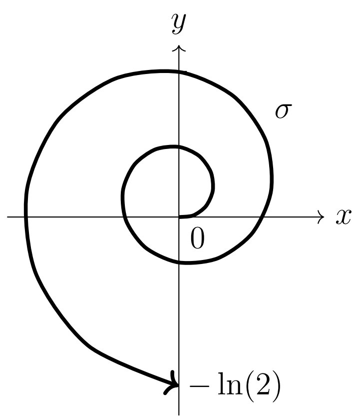
5.MC3 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ -e^{x-y} \end{pmatrix}$. Für welches der folgenden f mit $f(x,y)$ ist der Gradient $\nabla f(x,y) = K(x,y)$?

(A) **TRUE:** $f(x,y) = e^{x-y}$
(B) $f(x,y) = e^{x+y}$
(C) $f(x,y) = e^{-x+y}$
(D) $f(x,y) = xe^{y}$

Lösung:

Für $f(x,y) = e^{x-y}$ gilt
$$\nabla f(x,y) = (e^{x-y}, -e^{x-y}) = K(x,y).$$
Für alle anderen Funktionen ist das nicht der Fall.

5.MC4 [1 Punkt] Gegeben seien wieder das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ -e^{x-y} \end{pmatrix}$ aus **5.MC3** und die ebene Kurve σ unten. Die Arbeit $A = \int_\sigma K \cdot d\gamma$ ist dann ...



(A) $A = \frac{1}{2}$
(B) $A = \ln(2)$
(C) **TRUE:** $A = 1$
(D) $A = e^2$

Lösung:

Das Vektorfeld ist konservativ, da $K(x,y) = \nabla f(x,y)$ für $f(x,y) = e^{x-y}$. Also ist
$$A = \int_\sigma K \cdot d\gamma = f(0, -\ln(2)) - f(0,0) = e^{\ln(2)} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

5.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei das Vektorfeld $K(x,y)$ mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$.

Dann ist $\operatorname{div}(K)(x,y) = \ldots$

(A) $x^2 + e^x \cos(y)$

(B) $x^2 + e^x \sin(y)$

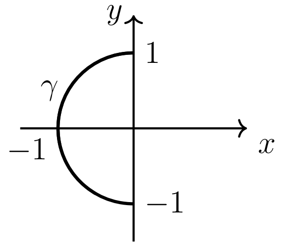
(C) $2xy + e^x \sin(y)$

(D) **TRUE:** $2xy + e^x \cos(y)$

Lösung:

Sei $K = (P, Q)$. Dann gilt $\operatorname{div}(K) = P_x + Q_y = 2xy + e^x \cos(y)$.

5.MC6 **[1 Punkt]** Die Kurve γ (auf einer Kreislinie) ist in der folgenden Abbildung gegeben.



Welche Angaben unten geben eine Parametrisierung der Kurve γ von $(0,1)$ nach $(0,-1)$?

(A) **TRUE:** $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(B) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(C) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(D) $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(-\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Lösung:

Es muss

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

gelten. Alle anderen Möglichkeiten stimmen nicht mit der Kurve γ überein.

5.MC7 **[1 Punkt]** Für γ aus **5.MC6** und $I = \int_\gamma \frac{1}{\ln(x^2+y^2)+1} ds$ gilt $I = \ldots$

(A) $\frac{2\pi}{\ln(2)}$

(B) **TRUE:** $\frac{\pi}{\ln(2)}$

(C) $\frac{\pi^2}{2}$

(D) π

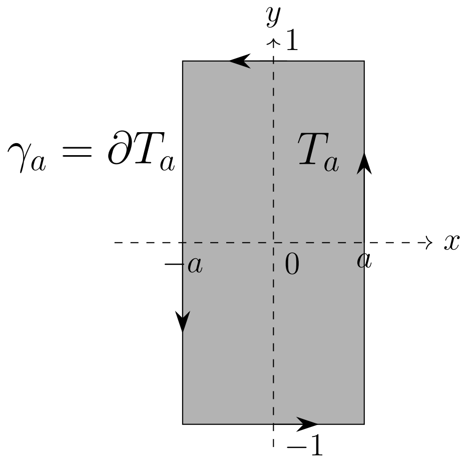
Lösung:

Entlang der Kurve γ gilt $x^2 + y^2 = 1$, und somit

$$I = \int_\gamma \frac{1}{\ln(x^2+y^2+1)} ds = \int_\gamma \frac{1}{\ln(1+1)} ds = \frac{1}{\ln(2)} \int_\gamma ds = \frac{1}{\ln(2)} \text{Länge}(\gamma) = \frac{1}{\ln(2)} \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{\ln(2)}.$$

5.MC8 [1 Punkt] Sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x y + 5y \end{pmatrix}$. Gegeben sei das ebene Gebiet T_a mit Randkurve $\partial T_a = \gamma_a$, wie in der folgenden Abbildung (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -a \leq x \leq a, -1 \leq y \leq 1\}$ von $a > 0$ ab.

Für welches $a \geq 0$ ist $\oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds = 60$?



(A) **TRUE:** $a = 3$
(B) $a = 15$
(C) $a = 10$
(D) $a = 30$

Lösung:

Mit dem Satz von Gauss gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds &= \iint_{T_a} \operatorname{div}(K)(x,y) dA = \iint_{T_a} (e^x - e^x + 5) dA \\ &= 5 \iint_{T_a} dA = 5 \cdot \text{Fläche}(T_a) = 5(2a \cdot 2) = 20a \stackrel{!}{=} 60 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $a = 3$.

5.A1 [4 Punkte] Sei das von $b > 0$ abhängige Vektorfeld K_b mit $K_b(x,y) = \begin{pmatrix} by^2 - b^2 y + 2yx \\ (by + x)^2 \end{pmatrix}$ gegeben. Sei T_a das Gebiet aus **5.MC8** oben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$, in Abhängigkeit von a und b. **Hinweis:** Eine Parametrisierung der Kurve ist nicht notwendig.

Lösung:

Für $K_b = (P, Q)$ sind $P_y(x,y) = 2by - b^2 + 2x, Q_x(x,y) = 2by + 2x$.

Mit der Formel von Green (bei richtiger Orientierung) folgt

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_a} K_b d\gamma &= \iint_{T_a} (Q_x - P_y) dA \\ &= \iint_{T_a} b^2 dA = b^2 \iint_{T_a} dA = b^2 \cdot (2a) \cdot 2 = 4ab^2.\end{aligned}$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1.**