D–MAVT, Neur. Syst. Comp.

# Prüfung Stochastik

401-0603-00L

*Bitte noch nicht umblättern!*

# Aufgaben

**1. [10 Punkte]**

Ein Immobilienbüro zieht Bilanz. Im vergangenen Geschäftsjahr wurden ingesamt 200 Wohnungen verkauft, 100 hiervon in der Stadt Zürich und 60 in Winterthur. Von den in der Stadt Zürich verkauften Wohnungen waren 40% Einzimmerwohnungen, von denen in Winterthur 50% und von den restlichen 30%.

**(a)** **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung eine Einzimmerwohnung war.

**(b)** **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung in der Stadt Zürich lag, gegeben, dass sie keine Einzimmerwohnung war.

Die folgende Tabelle gibt den Anteil der verkauften Wohnungen an, die einen Balkon hatten.

| | Stadt Zürich | Winterthur | Rest |
|---|---|---|---|
| Einzimmerwohnung | 40% | 30% | 25% |
| Keine Einzimmerwohnung | 50% | 40% | 75% |

Das heisst, von den verkauften Einzimmerwohnungen in der Stadt Zürich hatten 40% einen Balkon; usw.

**(c)** **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung in Winterthur war, gegeben, dass sie einen Balkon hatte und in der Stadt Zürich oder Winterthur lag.

Das Immobilienbüro beschäftigt für den Verkauf der Wohnungen zwei Makler A und B. Die Anzahl der verkauften Wohnungen am ersten Arbeitstag des neuen Geschäftsjahres von Makler A wird mit $N_A$ und die von Makler B mit $N_B$ bezeichnet. Wir nehmen an, dass $N_A$ und $N_B$ unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 2 bzw. 3 sind, d.h., $N_A \sim \text{Poisson}(2)$ und $N_B \sim \text{Poisson}(3)$.

**(d)** **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Makler A und B an diesem Tag zusammen 3 Wohnungen verkaufen.
**Hinweis:** Terme der Form $6e^{-9}$ usw. können im Ergebnis stehen gelassen werden. Vereinfachen Sie aber trotzdem soweit wie möglich.

Die Zeitspanne (in Arbeitstagen) zwischen dem $(k-1)$-ten und $k$-ten Verkauf einer Wohnung von Makler A wird mit $T_k$ für $k = 1, 2, \dots$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass die $T_k$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\frac{1}{2}$, Varianz $\frac{1}{4}$ und Wertebereich $[0, \infty)$ sind. Makler A erhält einen Bonus zu seinem Gehalt, falls er innerhalb einer Arbeitswoche (fünf Arbeitstage) mindestens sechzehn Wohnungen verkauft.

**(e)** **[2 Punkte]** Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass Makler A in der nächsten Arbeitswoche einen Bonus erhält.

**Lösung:**

**(a)** Wir definieren die folgenden Ereignisse:

- $Z = \{$"Eine verkaufte Wohnung lag in der Stadt Zürich"$\}$
- $W = \{$"Eine verkaufte Wohnung lag in Winterthur"$\}$
- $R = Z^c \cap W^c$
- $E = \{$"Eine verkaufte Wohnung war eine Einzimmerwohnung"$\}$.

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}[Z] = 0.5$, $\mathbb{P}[W] = 0.3$, $\mathbb{P}[R] = 0.2$, $\mathbb{P}[E|Z] = 0.4$, $\mathbb{P}[E|W] = 0.5$ und $\mathbb{P}[E|R] = 0.3$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[E] &= \mathbb{P}[E|Z]\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[E|W]\mathbb{P}[W] + \mathbb{P}[E|R]\mathbb{P}[R] \quad \textbf{[1 Punkt]}\\ &= 0.4 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.41. \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

**(b)** Mit Aufgabenteil a) und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z|E^c] &= \frac{\mathbb{P}[Z \cap E^c]}{\mathbb{P}[E^c]} = \frac{\mathbb{P}[Z] - \mathbb{P}[Z \cap E]}{1 - \mathbb{P}[E]} = \frac{\big(1 - \mathbb{P}[E|Z]\big)\mathbb{P}[Z]}{1 - \mathbb{P}[E]} \quad \textbf{[1 Punkt]}\\ &= \frac{(1 - 0.4) \cdot 0.5}{1 - 0.41} = \frac{0.3}{0.59} = \frac{30}{59}. \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

**(c)** Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[E^c|Z] &= 1 - \mathbb{P}[E|Z] = 0.6\\ \mathbb{P}[E^c|W] &= 1 - \mathbb{P}[E|W] = 0.5\\ \mathbb{P}[E^c|R] &= 1 - \mathbb{P}[E|R] = 0.7.\end{aligned}$$

Sei $B$ das Ereignis, dass eine verkaufte Wohnung einen Balkon hatte. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und der Multiplikationsregel gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B \cap Z] &= \mathbb{P}[B \cap Z \cap E] + \mathbb{P}[B \cap Z \cap E^c]\\ &= \mathbb{P}[B|E \cap Z]\mathbb{P}[E \cap Z] + \mathbb{P}[B|E^c \cap Z]\mathbb{P}[E^c \cap Z]\\ &= \mathbb{P}[B|E \cap Z]\mathbb{P}[E|Z]\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[B|E^c \cap Z]\mathbb{P}[E^c|Z]\mathbb{P}[Z]\\ &= 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B \cap W] &= \mathbb{P}[B|E \cap W]\mathbb{P}[E \cap W] + \mathbb{P}[B|E^c \cap W]\mathbb{P}[E^c \cap W]\\ &= \mathbb{P}[B|E \cap W]\mathbb{P}[E|W]\mathbb{P}[W] + \mathbb{P}[B|E^c \cap W]\mathbb{P}[E^c|W]\mathbb{P}[W]\\ &= 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.105\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P}\Big[B \cap (Z \cup W)\Big] = \mathbb{P}[B \cap Z] + \mathbb{P}[B \cap W] = 0.335.$$

( **[1 Punkt]** für korrekte Berechnung von $\mathbb{P}[B \cap Z]$ und $\mathbb{P}[B \cap W]$.) Hieraus folgt

$$\mathbb{P}\Big[W \Big| B \cap (Z \cup W)\Big] = \frac{\mathbb{P}\big[B \cap W\big]}{\mathbb{P}\big[B \cap (Z \cup W)\big]} = \frac{0.105}{0.335} = \frac{21}{67}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

**(d)** Das Ereignis $\{N_A + N_B = 3\}$ lässt sich wie folgt durch Elementarereignisse beschreiben

$$\begin{aligned}\{N_A + N_B = 3\} = \{N_A = 3,\ N_B = 0\} &\cup \{N_A = 2,\ N_B = 1\} \\ &\cup \{N_A = 1,\ N_B = 2\} \cup \{N_A = 0,\ N_B = 3\}.\end{aligned}$$

Dies ergibt mit der Additionsregel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_A + N_B = 3] &= \mathbb{P}[N_A = 3,\ N_B = 0] + \mathbb{P}[N_A = 2,\ N_B = 1] \\ &\quad + \mathbb{P}[N_A = 1,\ N_B = 2] + \mathbb{P}[N_A = 0,\ N_B = 3] \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \frac{2^3}{3!}e^{-2}e^{-3} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}\frac{3}{1!}e^{-3} + \frac{2}{1!}e^{-2}\frac{3^2}{2!}e^{-3} + e^{-2}\frac{3^3}{3!}e^{-3} \\ &= \frac{8 + 36 + 54 + 27}{6}e^{-5} = \frac{125}{6}e^{-5}, \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

da $N_A$ und $N_B$ unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 2 und 3 sind.

**(e)** Wir suchen eine Approximation der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{16} T_k \leq 5\right]$. Da $T_k$ für $k = 1, 2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu = 1/2$ und Varianz $\sigma^2 = 1/4$ sind, gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz, dass

$$S_{16}^* := \frac{\sum_{k=1}^{16} T_k - 16\mu}{\sigma\sqrt{16}} = \frac{\sum_{k=1}^{16} T_k - 8}{2}$$

approximativ standardnormal verteilt ist **[1 Punkt]** . Dies ergibt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{16} T_k \leq 5\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{k=1}^{16} T_k - 8}{2} \leq \frac{5-8}{2}\right] = \mathbb{P}\left[S_{16}^* \leq -\frac{3}{2}\right] \\ &\approx \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 0.9332 = 0.0668, \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

wobei der Wert $\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 0.9332$ der Tabelle der standard Normalverteilung im Anhang der Prüfung entnommen ist.

**2. [10 Punkte]**

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

**(a)** **[1 Punkt]** Seien $A$, $B$ und $C$ drei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] > 0$ und $\mathbb{P}[B|A] \geq \mathbb{P}[C|A]$. Es gilt:

(i) $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$ (ii) $\mathbb{P}[B] \geq \mathbb{P}[C]$ (iii) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A \cap C]$

**(b)** **[1 Punkt]** Seien $A$ und $B$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \cap B^c] = 1/6$ und $\mathbb{P}[A^c \cap B] = 1/3$, wobei $A^c$ und $B^c$ die Komplemente von $A$ und $B$ bezeichnen. Dann gilt:

(i) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/18$,
(ii) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/2$,
(iii) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)]$ ist aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

**(c) [1 Punkt]** Sei $X$ eine auf einem Interval $[a, b]$ uniform-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 10$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = 3$. Die Parameter $a, b$ sind gegeben durch:

(i) $a = 8$ und $b = 12$,
(ii) $a = 7$ und $b = 13$,
(iii) $a$ und $b$ sind aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

**(d) [1 Punkt]** Seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 2$ und $\mathrm{Var}(Y) = 2$, sowie Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$. Wie gross ist $\mathrm{Var}(X - Y)$?

(i) 2 (ii) 3 (iii) 4

**(e) [1 Punkt]** Sei $X$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Dann gilt:

(i) $\mathbb{E}\big[(X-\mu)^5\big] = 0$,
(ii) $\mathbb{E}\big[(X-\mu)^5\big] = 3\sigma^4$,
(iii) $\mathbb{E}\big[(X-\mu)^5\big]$ lässt sich aus den Angaben nicht eindeutig bestimmen.

**(f) [1 Punkt]** Seien $X$ eine Zufallsvariable und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $Y = f(X)$:

(i) $\mathbb{E}[Y] = 0$ (ii) $\mathbb{E}\big[Y^2\big] = 1$ (iii) $\mathrm{Var}(Y) = 2$

**(g) [1 Punkt]** Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ haben. Dann gilt:

(i) $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$.
(ii) $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$.
(iii) $\overline{X}_n \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/\sqrt{n})$.

**(h) [1 Punkt]** Bei einem statistischen Test gilt:

(i) Das Signifikanzniveau $\alpha$ und der $p$-Wert hängen nicht von den Daten ab.
(ii) Die Nullhypothese $H_0$ wird verworfen, wenn der $p$-Wert grösser als das Signifikanzniveau $\alpha$ ist.
(iii) Weder (i) noch (ii) ist richtig.

**(i) [1 Punkt]** Wir betrachten eine einfache lineare Regression für die Datenpunkte $(x_1, y_1)$, $\ldots$, $(x_n, y_n)$ mit unbekannten Parametern $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$, Zielvariablen $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$ und Fehlertermen $E_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

(i) Der Maximum-Likelihood Schätzer stimmt immer mit dem Kleinste-Quadrate Schätzer überein.
(ii) $\beta_1$ ist im Allgemeinen der wichtigere Parameter als $\beta_0$.
(iii) Weder (i) noch (ii) ist richtig.

**(j) [1 Punkt]** In einem Experiment hat man Beobachtungen

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2, \ldots, x_n & \text{unter Versuchsbedingung 1,} \\ y_1, y_2, \ldots, y_m & \text{unter Versuchsbedingung 2.} \end{array}$$

Es gilt:

(i) Wenn $n = m$ ist, handelt es sich immer um eine gepaarte Stichprobe.
(ii) Wenn $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ und $y_1 \leq \cdots \leq y_m$ gilt, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.
(iii) Wenn beide Versuchsbedingungen an derselben Versuchseinheit eingesetzt wurden, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.

**Lösung:**

**(a) [1 Punkt]** Seien $A$, $B$ und $C$ drei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] > 0$ und $\mathbb{P}[B|A] \geq \mathbb{P}[C|A]$. Es gilt:

(i) $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$ (ii) $\mathbb{P}[B] \geq \mathbb{P}[C]$ (iii) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A \cap C]$ ✓

**(b) [1 Punkt]** Seien $A$ und $B$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \cap B^c] = 1/6$ und $\mathbb{P}[A^c \cap B] = 1/3$, wobei $A^c$ und $B^c$ die Komplemente von $A$ und $B$ bezeichnen. Dann gilt:

(i) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/18$,
(ii) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/2$, ✓
(iii) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)]$ ist aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

**(c) [1 Punkt]** Sei $X$ eine auf einem Interval $[a, b]$ uniform-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 10$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = 3$. Die Parameter $a, b$ sind gegeben durch:

(i) $a = 8$ und $b = 12$,
(ii) $a = 7$ und $b = 13$, ✓
(iii) $a$ und $b$ sind aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

**(d) [1 Punkt]** Seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 2$ und $\mathrm{Var}(Y) = 2$, sowie Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$. Wie gross ist $\mathrm{Var}(X - Y)$?

(i) 2 ✓ (ii) 3 (iii) 4

**(e) [1 Punkt]** Sei $X$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Dann gilt:

(i) $\mathbb{E}\big[(X - \mu)^5\big] = 0$, ✓
(ii) $\mathbb{E}\big[(X - \mu)^5\big] = 3\sigma^4$,
(iii) $\mathbb{E}\big[(X - \mu)^5\big]$ lässt sich aus den Angaben nicht eindeutig bestimmen.

**(f) [1 Punkt]** Seien $X$ eine Zufallsvariable und $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $Y = f(X)$:

(i) $\mathbb{E}[Y] = 0$ (ii) $\mathbb{E}\big[Y^2\big] = 1$ ✓ (iii) $\mathrm{Var}(Y) = 2$

**(g) [1 Punkt]** Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ haben. Dann gilt:

(i) $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$.
(ii) $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$. ✓
(iii) $\overline{X}_n \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/\sqrt{n})$.

**(h) [1 Punkt]** Bei einem statistischen Test gilt:

(i) Das Signifikanzniveau $\alpha$ und der $p$-Wert hängen nicht von den Daten ab.

(ii) Die Nullhypothese $H_0$ wird verworfen, wenn der $p$-Wert grösser als das Signifikanzniveau $\alpha$ ist.

(iii) Weder (i) noch (ii) ist richtig. ✓

**(i) [1 Punkt]** Wir betrachten eine einfache lineare Regression für die Datenpunkte $(x_1, y_1)$, $\ldots$, $(x_n, y_n)$ mit unbekannten Parametern $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$, Zielvariablen $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$ und Fehlertermen $E_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

(i) Der Maximum-Likelihood Schätzer stimmt immer mit dem Kleinste-Quadrate Schätzer überein.

(ii) $\beta_1$ ist im Allgemeinen der wichtigere Parameter als $\beta_0$. ✓

(iii) Weder (i) noch (ii) ist richtig.

**(j) [1 Punkt]** In einem Experiment hat man Beobachtungen

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2, \ldots, x_n & \text{unter Versuchsbedingung 1,} \\ y_1, y_2, \ldots, y_m & \text{unter Versuchsbedingung 2.} \end{array}$$

Es gilt:

(i) Wenn $n = m$ ist, handelt es sich immer um eine gepaarte Stichprobe.

(ii) Wenn $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ und $y_1 \leq \cdots \leq y_m$ gilt, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.

(iii) Wenn beide Versuchsbedingungen an derselben Versuchseinheit eingesetzt wurden, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe. ✓

**3. [10 Punkte]**

Die Polizei misst bei einer Geschwindigkeitskontrolle in der Stadt Zürich die Zeit $X$, bis fünf Geschwindigkeitsüberschreitungen gemessen wurden. Man nimmt an, dass die Dichte $f_\lambda(x)$ von $X$ die folgende Form hat:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} c\, x^4 e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Hinweis:** Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

**(a) [2 Punkte]** Was ist $c$ und warum?

**(b) [2 Punkte]** Berechnen Sie den Erwartungswert von $X$.

Wir betrachten nun $n$ unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit der Dichte $f_\lambda$.

**(c) [2 Punkte]** Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannten Parameter $\lambda$.

**(d) [2 Punkte]** Bestimmen Sie einen Momentenschätzer für den unbekannten Parameter $\lambda$.

**(e) [2 Punkte]** Ist der Momentschätzer im Allgemeinen eindeutig? Falls nein, dann finden Sie einen Zweiten.

**Lösungen:**

**(a)** Wir berechnen

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\lambda x}\, dx \overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda^5}\int_0^\infty y^4 e^{-y}\, dy = \frac{4!}{\lambda^5}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Folglich müssen wir $c = \frac{\lambda^5}{4!}$ wählen, dass $f_\lambda$ eine zulässige Dichte ist. **[1 Punkt]**

**(b)** Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_\lambda(x)\, dx = \frac{\lambda^5}{4!}\int_0^\infty x^5 e^{-\lambda x}\, dx \quad \textbf{[1 Punkt]}\\ &= \frac{\lambda^5}{4!}\frac{1}{\lambda^6}\int_0^\infty (\lambda x)^5 e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) = \frac{5}{\lambda} \quad \textbf{[1 Punkt]}.\end{aligned}$$

**(c)** Die log-Likelihood-Funktion $\ell$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\ell(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \log f_\lambda(X_i) = \sum_{i=1}^n (5\log\lambda + 4\log X_i - \lambda X_i - \log 4!)\\ &= 5n\log\lambda + 4\sum_{i=1}^n \log X_i - \lambda\sum_{i=1}^n X_i - n\log 4!. \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

Den MSE erhalten wir als kritischen Punkt von $\ell$:

$$\ell'(\lambda) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{5n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{5}{\overline{X}_N}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

**(d)** Aus Teilaufgabe **(b)** folgt direkt: $\lambda = 5/\mu_1$ **[1 Punkt]** , wobei $\mu_1$ das erste Moment bezeichnet. Ersetzen wir $\mu_1$ durch das erste empirische Moment $m_1$, dann sehen wir dass der Momentschätzer gegeben ist durch $\hat{\lambda} = \frac{5}{\overline{X}_N}$ **[1 Punkt]** und mit dem MLE übereinstimmt.

**(e)** Nein, im Allgemeinen ist er nicht eindeutig. Eine ähnliche Rechnung wie in Teilaufgabe **(b)** zeigt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{\lambda^5}{4!}\int_0^\infty x^6 e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^5}{4!}\frac{1}{\lambda^7}\int_0^\infty (\lambda x)^6 e^{-\lambda x}\, d(\lambda x)\\ &= \frac{\lambda^5}{4!}\frac{1}{\lambda^7}6! = \frac{30}{\lambda^2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

Also gilt $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{30}{\lambda^2} - \frac{25}{\lambda^2} = \frac{5}{\lambda^2}$. Andererseits haben wir $\mathrm{Var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2$ und somit ist ein weiterer Momentschätzer von $\lambda$:

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{5}{m_2 - m_1^2}} = \sqrt{\frac{5}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

**4. [10 Punkte]**

Ein Reifenhersteller hat einen neuen Sommerreifen entwickelt. In einer Testreihe soll überprüft werden ob der neue Sommerreifen einen kürzeren Bremsweg hat als der alter Sommerreifen. Der Test besteht darin, dass man den Bremsweg eines mit 60 km/h fahrenden Personenfahrzeugs misst. Die Testreighe besteht aus 10 voneinander unabhängigen Fahrten mit den neuen und den alten Sommerreifen. Bei allen 20 Testfahrten wird dasselbe Fahrzeug verwendet. Die Bremswegstrecken lauten:

| **Versuch Nr.** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **alter Sommerreifen:** $X_i$ | 18.5 | 19.4 | 18 | 18.3 | 17 | 17.2 | 16 | 18.4 | 19.4 | 18.9 |
| **neuer Sommerreifen:** $Y_i$ | 16.4 | 14.8 | 15.3 | 17.6 | 16.5 | 17.4 | 17.7 | 19.2 | 15.7 | 15.5 |

Mit den obigen Messwerten findet man:

$$\bar{X}_{10} = 18.11,\ \bar{Y}_{10} = 16.61,\ s_X^2 = 1.19,\ s_Y^2 = 1.85,\ s_{X-Y}^2 = 4.44,\ s_{pool}^2 = 1.52.$$

Man kann davon ausgehen, dass der Bremsweg gut durch eine Normalverteilung beschrieben wird, und dass sich die Varianzen der beiden Versuchsreihen nicht unterscheiden, d.h. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Führen Sie einen geeigneten t-Test zum Niveau 5% durch, um festzustellen, ob der Bremsweg mit den neuen Sommerreifen kürzer ist. Beantworten Sie hierzu folgende Fragen.

**(a)** **[1 Punkt]** Wie lauten die Null- und Alternativhypothese in Worten?

**(b)** **[2 Punkte]** Schreiben Sie die Null- und Alternativhypothese mit Hilfe von $\mu_X$ und $\mu_Y$ formal hin.

**(c)** **[1 Punkt]** Handelt es sich hier um einen gepaarten oder ungepaarten Vergleich?

**(d)** **[1 Punkt]** Ist der Test ein- oder zweiseitig?

**(e)** **[2 Punkte]** Geben Sie den Verwerfungsbereich für den obigen t-Test an (Niveau 5%).

**(f)** **[1 Punkt]** Wird die Nullhypothese verworfen? Begründen Sie!

**(g)** **[1 Punkt]** Ist der $p$-Wert für den obigen Test grösser oder kleiner als das Niveau 5%? Begründen Sie!

**(h)** **[1 Punkt]** Welcher Test wäre hier angebrachter, wenn man davon ausgehen muss, dass die Länge des Bremsweges nicht annähernd normalverteilt ist?

**Lösung:**

**(a)** **Nullhypothese:** Der Bremsweg mit dem neuen Sommerreifen ist gleich lang wie derjenige mit den alten Sommerreifen.
**Alternativhypothese:** Der Bremsweg mit den neuen Sommerreifen ist kürzer als derjenige mit den alten Sommerreifen.
(Für beide Hypothesen **[1 Punkt]** )

**(b)** $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ **[1 Punkt]** und $H_A : \mu_X > \mu_Y$. **[1 Punkt]**

**(c)** ungepaart **[1 Punkt]**

**(d)** einseitig **[1 Punkt]**

**(e)** Die Teststatistik ist gegeben durch $T := \frac{\bar{X}_{10}-\bar{Y}_{10}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{10}+\frac{s_Y^2}{10}}}$. Es gilt

$$\sqrt{\frac{s_X^2}{10}+\frac{s_Y^2}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} s_{pool} \frac{1}{\sqrt{9}} \sqrt{18} = s_{pool} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

und somit erhalten wir $T = \frac{\bar{X}_{10}-\bar{Y}_{10}}{s_{pool}} \sqrt{5}$. **[1 Punkt]** Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Verwerfungsbereich $K$ gegeben ist durch $K = (t_{18,0.95}, \infty) = (1.734, \infty)$. **[1 Punkt]**

**(f)** $T = \frac{1.5}{\sqrt{1.52}} \sqrt{5} = 2.72 \in K$ , daher wird die Nullhypothese verworfen. **[1 Punkt]**

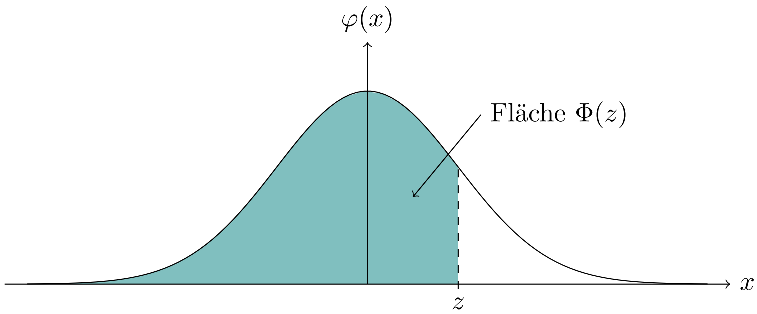
**(g)** Kleiner, weil die Nullhypothese zum Niveau 5% klar abgelehnt wird. **[1 Punkt]**

**(h)** Man sollte einen Mann-Whitney-U-Test durchführen. **[1 Punkt]**

# Tabellen

## Tabelle der Standardnormalverteilung:

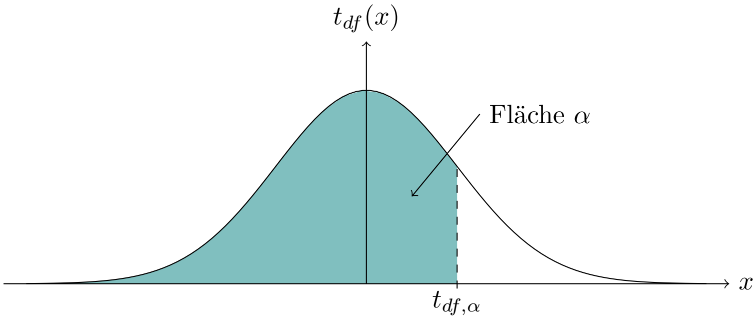
$$\Phi(z) = \mathbb{P}\left(Z \leq z\right), \; Z \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$$




Lesebeispiel Tabelle: $\mathbb{P}\left(Z \leq 1.96\right) = 0.975$

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

# Quantile der t-Verteilung:




Lesebeispiel Tabelle: $t_{9,\,0.975} = 2.262$

| $df \setminus \alpha$ | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 0.727 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 0.289 | 0.617 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.277 | 0.584 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.271 | 0.569 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.267 | 0.559 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.265 | 0.553 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.263 | 0.549 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.262 | 0.546 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.261 | 0.543 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.260 | 0.542 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.260 | 0.540 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.259 | 0.539 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 0.259 | 0.538 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.258 | 0.537 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.258 | 0.536 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.258 | 0.535 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.257 | 0.534 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.257 | 0.534 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.257 | 0.533 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.257 | 0.533 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.257 | 0.532 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.256 | 0.531 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.256 | 0.531 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.256 | 0.530 | 0.855 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | 0.254 | 0.527 | 0.848 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 90 | 0.254 | 0.526 | 0.846 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 | 2.632 |
| 120 | 0.254 | 0.526 | 0.845 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| $\infty$ | 0.253 | 0.524 | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |