

D-MAVT, Neur. Syst. Comp.

Prüfung Stochastik

401-0603-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

[10 Punkte]

Ein Immobilienbüro zieht Bilanz. Im vergangenen Geschäftsjahr wurden insgesamt 200 Wohnungen verkauft, 100 hiervon in der Stadt Zürich und 60 in Winterthur. Von den in der Stadt Zürich verkauften Wohnungen waren 40% Einzimmerwohnungen, von denen in Winterthur 50% und von den restlichen 30%.

- (a) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung eine Einzimmerwohnung war.
- (b) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung in der Stadt Zürich lag, gegeben, dass sie keine Einzimmerwohnung war.

Die folgende Tabelle gibt den Anteil der verkauften Wohnungen an, die einen Balkon hatten.

	Stadt Zürich	Winterthur	Rest
Einzimmerwohnung	40%	30%	25%
Keine Einzimmerwohnung	50%	40%	75%

Das heisst, von den verkauften Einzimmerwohnungen in der Stadt Zürich hatten 40% einen Balkon; usw.

- (c) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung in Winterthur war, gegeben, dass sie einen Balkon hatte und in der Stadt Zürich oder Winterthur lag.

Das Immobilienbüro beschäftigt für den Verkauf der Wohnungen zwei Makler A und B. Die Anzahl der verkauften Wohnungen am ersten Arbeitstag des neuen Geschäftsjahres von Makler A wird mit N_A und die von Makler B mit N_B bezeichnet. Wir nehmen an, dass N_A und N_B unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 2 bzw. 3 sind, d.h., $N_A \sim \text{Poisson}(2)$ und $N_B \sim \text{Poisson}(3)$.

- (d) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Makler A und B an diesem Tag zusammen 3 Wohnungen verkaufen.

Hinweis: Terme der Form $6e^{-9}$ usw. können im Ergebnis stehen gelassen werden. Vereinfachen Sie aber trotzdem soweit wie möglich.

Die Zeitspanne (in Arbeitstagen) zwischen dem $(k-1)$ -ten und k -ten Verkauf einer Wohnung von Makler A wird mit T_k für $k = 1, 2, \dots$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass die T_k unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\frac{1}{2}$, Varianz $\frac{1}{4}$ und Wertebereich $[0, \infty)$ sind. Makler A erhält einen Bonus zu seinem Gehalt, falls er innerhalb einer Arbeitswoche (fünf Arbeitstage) mindestens sechzehn Wohnungen verkauft.

- (e) **[2 Punkte]** Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass Makler A in der nächsten Arbeitswoche einen Bonus erhält.

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

(a) [1 Punkt] Seien A , B und C drei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] > 0$ und $\mathbb{P}[B|A] \geq \mathbb{P}[C|A]$. Es gilt:

- (i) $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$ (ii) $\mathbb{P}[B] \geq \mathbb{P}[C]$ (iii) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A \cap C]$

(b) [1 Punkt] Seien A und B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \cap B^c] = 1/6$ und $\mathbb{P}[A^c \cap B] = 1/3$, wobei A^c und B^c die Komplemente von A und B bezeichnen. Dann gilt:

- (i) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/18$,
(ii) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/2$,
(iii) $\mathbb{P}[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)]$ ist aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

(c) [1 Punkt] Sei X eine auf einem Intervall $[a, b]$ uniform-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 10$ und Varianz $\text{Var}(X) = 3$. Die Parameter a, b sind gegeben durch:

- (i) $a = 8$ und $b = 12$,
(ii) $a = 7$ und $b = 13$,
(iii) a und b sind aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

(d) [1 Punkt] Seien X und Y Zufallsvariablen mit Varianzen $\text{Var}(X) = 2$ und $\text{Var}(Y) = 2$, sowie Kovarianz $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Wie gross ist $\text{Var}(X - Y)$?

- (i) 2 (ii) 3 (iii) 4

(e) [1 Punkt] Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \mu$ und Varianz $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Dann gilt:

- (i) $\mathbb{E}[(X - \mu)^5] = 0$,
(ii) $\mathbb{E}[(X - \mu)^5] = 3\sigma^4$,
(iii) $\mathbb{E}[(X - \mu)^5]$ lässt sich aus den Angaben nicht eindeutig bestimmen.

(f) [1 Punkt] Seien X eine Zufallsvariable und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $Y = f(X)$:

- (i) $\mathbb{E}[Y] = 0$ (ii) $\mathbb{E}[Y^2] = 1$ (iii) $\text{Var}(Y) = 2$

(g) [1 Punkt] Sei X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ haben. Dann gilt:

(i) $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$.

(ii) $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$.

(iii) $\bar{X}_n \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/\sqrt{n})$.

(h) [1 Punkt] Bei einem statistischen Test gilt:

(i) Das Signifikanzniveau α und der p -Wert hängen nicht von den Daten ab.

(ii) Die Nullhypothese H_0 wird verworfen, wenn der p -Wert grösser als das Signifikanzniveau α ist.

(iii) Weder (i) noch (ii) ist richtig.

(i) [1 Punkt] Wir betrachten eine einfache lineare Regression für die Datenpunkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit unbekanntem Parametern $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$, Zielvariablen $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$ und Fehlertermen E_i für $i = 1, \dots, n$.

(i) Der Maximum-Likelihood Schätzer stimmt immer mit dem Kleinste-Quadrate Schätzer überein.

(ii) β_1 ist im Allgemeinen der wichtigere Parameter als β_0 .

(iii) Weder (i) noch (ii) ist richtig.

(j) [1 Punkt] In einem Experiment hat man Beobachtungen

x_1, x_2, \dots, x_n unter Versuchsbedingung 1,

y_1, y_2, \dots, y_m unter Versuchsbedingung 2.

Es gilt:

(i) Wenn $n = m$ ist, handelt es sich immer um eine gepaarte Stichprobe.

(ii) Wenn $x_1 \leq \dots \leq x_n$ und $y_1 \leq \dots \leq y_m$ gilt, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.

(iii) Wenn beide Versuchsbedingungen an derselben Versuchseinheit eingesetzt wurden, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.

Aufgabe 3

[10 Punkte]

Die Polizei misst bei einer Geschwindigkeitskontrolle in der Stadt Zürich die Zeit X , bis fünf Geschwindigkeitsüberschreitungen gemessen wurden. Man nimmt an, dass die Dichte $f_\lambda(x)$ von X die folgende Form hat:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} c x^4 e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

(a) [2 Punkte] Was ist c und warum?

(b) [2 Punkte] Berechnen Sie den Erwartungswert von X .

Wir betrachten nun n unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit der Dichte f_λ .

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannt Parameter λ .

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie einen Momentenschätzer für den unbekannt Parameter λ .

(e) [2 Punkte] Ist der Momentenschätzer im Allgemeinen eindeutig? Falls nein, dann finden Sie einen Zweiten.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Ein Reifenhersteller hat einen neuen Sommerreifen entwickelt. In einer Testreihe soll überprüft werden ob der neue Sommerreifen einen kürzeren Bremsweg hat als der alter Sommerreifen. Der Test besteht darin, dass man den Bremsweg eines mit 60 km/h fahrenden Personensfahrzeugs misst. Die Testreihe besteht aus 10 voneinander unabhängigen Fahrten mit den neuen und den alten Sommerreifen. Bei allen 20 Testfahrten wird dasselbe Fahrzeug verwendet. Die Bremswegstrecken lauten:

Versuch Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
alter Sommerreifen: X_i	18.5	19.4	18	18.3	17	17.2	16	18.4	19.4	18.9
neuer Sommerreifen: Y_i	16.4	14.8	15.3	17.6	16.5	17.4	17.7	19.2	15.7	15.5

Mit den obigen Messwerten findet man:

$$\bar{X}_{10} = 18.11, \bar{Y}_{10} = 16.61, s_X^2 = 1.19, s_Y^2 = 1.85, s_{X-Y}^2 = 4.44, s_{pool}^2 = 1.52.$$

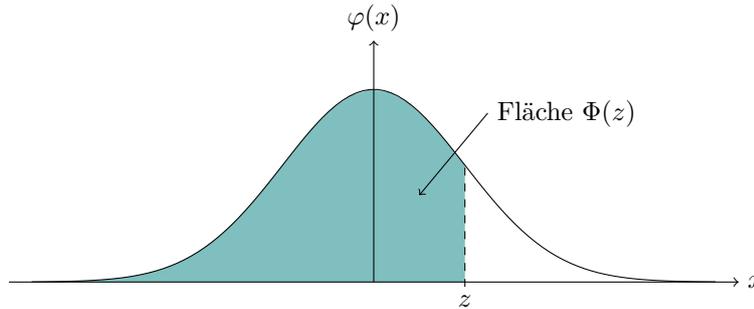
Man kann davon ausgehen, dass der Bremsweg gut durch eine Normalverteilung beschrieben wird, und dass sich die Varianzen der beiden Versuchsreihen nicht unterscheiden, d.h. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Führen Sie einen geeigneten t-Test zum Niveau 5% durch, um festzustellen, ob der Bremsweg mit den neuen Sommerreifen kürzer ist. Beantworten Sie hierzu folgende Fragen.

- (a) [1 Punkt] Wie lauten die Null- und Alternativhypothese in Worten?
- (b) [2 Punkte] Schreiben Sie die Null- und Alternativhypothese mit Hilfe von μ_X und μ_Y formal hin.
- (c) [1 Punkt] Handelt es sich hier um einen gepaarten oder ungepaarten Vergleich?
- (d) [1 Punkt] Ist der Test ein- oder zweiseitig?
- (e) [2 Punkte] Geben Sie den Verwerfungsbereich für den obigen t-Test an (Niveau 5%).
- (f) [1 Punkt] Wird die Nullhypothese verworfen? Begründen Sie!
- (g) [1 Punkt] Ist der p -Wert für den obigen Test grösser oder kleiner als das Niveau 5%? Begründen Sie!
- (h) [1 Punkt] Welcher Test wäre hier angebrachter, wenn man davon ausgehen muss, dass die Länge des Bremsweges nicht annähernd normalverteilt ist?

Tabellen

Tabelle der Standardnormalverteilung:

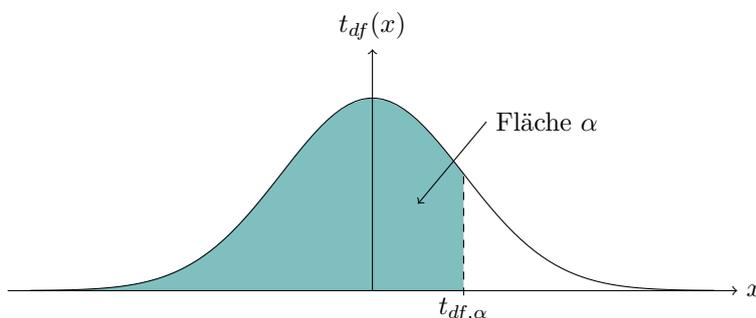
$$\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Lesebeispiel Tabelle: $\mathbb{P}(Z \leq 1.96) = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantile der t-Verteilung:



Lesebeispiel Tabelle: $t_{9, 0.975} = 2.262$

$df \setminus \alpha$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576