Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. a) 1.

b) 2.

c) 1.

d) 3. $\mathbb{P}(S0|E1) = \frac{\mathbb{P}(E1|S0)\mathbb{P}(S0)}{\mathbb{P}(E1|S0)\mathbb{P}(S0)+\mathbb{P}(E1|S1)\mathbb{P}(S1)} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.5} = 0.125 = \frac{1}{8}$.

e) 3.
1. fällt aus da wegen $0.1151661 < 0.5$ ist und die entsprechende Transformation auf die Standardnormalverteilung müsste negativ sein. 2. fällt aus da die Realisierungen nicht ganzzahlig sind. Mit R ergibt sich

```
> runif(3, 0, 1)
[1] 0.8822979 0.1150661 0.5368463
> qexp(0.8822979, 1)
[1] 2.139598
> qexp(0.1150661, 1)
[1] 0.1222423
> qexp(0.5368463, 1)
[1] 0.7696963
```

f) 2.

g) 3.

h) 2.

```
> 5.23/3 > 3.43/2
[1] TRUE
```

i) 2.

j) 3.

```
> pbinom(0, 4, 0.5)
[1] 0.0625
```

2. Sei K :="Münzwurf ergibt 'Kopf' " und U_i :="In Urne i befindet sich eine Kugel", wobei $i = 1, 2, 3$. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich $P[K] = P[K^c] = \frac{1}{2}$, $P[U_1 \mid K] = p$, $P[U_i \mid K] = \frac{1-p}{2}$, $i = 2, 3$, sowie $P[U_i \mid K^c] = 0$, $i = 1, 2, 3$.

a) Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P[U_1] = P[U_1 \mid K]P[K] + P[U_1 \mid K^c]P[K^c] = p \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2}.$$

b) Beachte, dass U_1, U_2, U_3 paarweise disjunkt sind (in allen drei Urnen zusammen befindet sich höchstens eine Kugel). Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} P[U_1^c \cap U_2^c] &= 1 - P[U_1 \cup U_2] = 1 - (P[U_1] + P[U_2]) \\ &= 1 - (P[U_1 \mid K]P[K] + P[U_1 \mid K^c]P[K^c] + P[U_2 \mid K]P[K] + P[U_2 \mid K^c]P[K^c]) \\ &= 1 - \left(p \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1+p}{4} = \frac{3-p}{4}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

$$\begin{aligned} P[U_1^c \cap U_2^c] &= P[U_1^c \cap U_2^c \mid K]P[K] + P[U_1^c \cap U_2^c \mid K^c]P[K^c] \\ &= P[U_3 \mid K]P[K] + P[U_1^c \cap U_2^c \mid K^c]P[K^c] \\ &= \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3-p}{4}. \end{aligned}$$

c) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[K \mid U_1^c]$ $(= P[U_2 \cup U_3 \mid U_1^c])$. Wir können sie mit der Formel von Bayes berechnen:

$$P[K \mid U_1^c] = \frac{P[U_1^c \mid K]P[K]}{P[U_1^c]} = \frac{(1 - P[U_1 \mid K])P[K]}{1 - P[U_1]} = \frac{(1-p) \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{p}{2}} = \frac{1-p}{2-p}.$$

d) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c]$ $(= P[K \mid U_1^c \cap U_2^c])$. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt (beachte, dass $U_3 \subset U_1^c \cap U_2^c$)

$$P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c] = \frac{P[U_3 \cap U_1^c \cap U_2^c]}{P[U_1^c \cap U_2^c]} = \frac{P[U_3]}{P[U_1^c \cap U_2^c]}.$$

Analog zu **a)** ist

$$P[U_3] = P[U_3 \mid K]P[K] + P[U_3 \mid K^c]P[K^c] = \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{4},$$

und aus **b)** haben wir $P[U_1^c \cap U_2^c] = \frac{3-p}{4}$. Somit ergibt sich weiter:

$$P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c] = \frac{\frac{1-p}{4}}{\frac{3-p}{4}} = \frac{1-p}{3-p}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)**

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \vartheta \int_0^1 xdx + \lambda \int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = \frac{\vartheta}{2} + \lambda \left(\log e^2 - \log 1\right) = \frac{\vartheta}{2} + 2\lambda,$$

thus $\vartheta = 2 - 4\lambda$.

b)

$$P\left[\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right] = P\left[\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right] + P\left[1 < X \leq \frac{3}{2}\right] = \int_{1/2}^{1} \vartheta x dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\lambda}{x} dx =$$

$$\vartheta \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1/2}^{1} + \lambda \log x\Big|_{x=1}^{x=3/2} = \frac{3\vartheta}{8} + \lambda \log\frac{3}{2} = \frac{3(2-4\lambda)}{8} + \lambda \log\frac{3}{2}.$$

c)

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^{\infty} \frac{f_X(x)}{x} dx = \vartheta \int_0^1 dx + \lambda \int_1^{e^2} \frac{1}{x^2} dx = \vartheta + \lambda \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1}^{x=e^2} =$$

$$\vartheta + \lambda\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 2 + \lambda\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) - 4\lambda.$$

d)

$$Cov(X, X^2) = E\left[X^3\right] - E\left[X\right] E\left[X^2\right].$$

We have (recall that by (a), $\lambda = 1/2$)

$$E\left[X^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)dx = \lambda \int_1^{e^2} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{e^2} = \lambda \frac{e^6 - 1}{3} = \frac{e^6 - 1}{6},$$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \lambda \int_1^{e^2} xdx = \lambda \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{e^2} = \lambda \frac{e^4 - 1}{2} = \frac{e^4 - 1}{4},$$

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \lambda \int_1^{e^2} dx = \lambda \int_1^{e^2} dx = \lambda\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Therefore,

$$Cov(X, X^2) = \frac{e^6 - 1}{6} - \frac{e^4 - 1}{4}\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{e^6 - 1}{6} - \frac{e^6 - e^4 - e^2 + 1}{8}.$$

e) Let $x_1, ..., x_N$ be positive observations and $\overline{x} = \frac{x_1 + ... + x_N}{N}$ stand for the empirical mean. Then,

$$E\left[Z\right] = E\left[X^\alpha\right] = \int_0^{\infty} x^\alpha f_X(x)dx = 2\int_0^{\infty} x^{1+\alpha} dx = 2\frac{x^{2+\alpha}}{2+\alpha}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{2+\alpha},$$

by equalizing it to $\overline{x}$ we get

$$\frac{2}{2+\widehat{\alpha}} = \overline{x},$$

or equivalently

$$\widehat{\alpha} = \frac{2}{\overline{x}} - 2.$$

Bitte wenden!

4. **a)** Die Log-likelihood Funktion:

$$L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\vartheta}(1+x_1)^{-1-\frac{1}{\vartheta}}\right)$$
$$= -n\log(\vartheta) - (1+\frac{1}{\vartheta})\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$$

Differentiate and set the differential to 0:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\vartheta} L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$$

and solve $\vartheta > 0$:

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)$$

This gives us an estimate $\hat{\vartheta} = 0.4672$

ALTERNATIVE: $\hat{\vartheta} = 0.514$

b) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$P[X > 1] = \int_1^\infty \frac{1}{\vartheta}(1+x)^{-1-\frac{1}{\vartheta}} = 2^{-\frac{1}{\vartheta}} = 2^{-\frac{1}{0.4672}} = 0.2268 = 22.68\%$$

ALTERNATIVE: $2^{-\frac{1}{0.514}} = 0.26 = 26\%$.

c) Der Erwartungswert einer $\exp\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$ Zufallsvariable ist ϑ, daraus folgt

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\log(1+X_i)] = \frac{1}{n}n\vartheta = \vartheta,$$

d.h. der Schätzer ist erwartungstreu.

ALTERNATIVE:

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}] = \frac{1+n}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\log(1+X_i)] = \frac{1+n}{n^2}n\vartheta = \frac{1+n}{n}\vartheta,$$

d.h. der Schätzer ist nicht erwartungstreu (aber zumindest asymptotisch erwartungstreu).

d) Die Varianz einer $\exp\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$ Zufallsvariable ist ϑ^2 und deswegen

$$\mathrm{Var}[\hat{\vartheta}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[\log(1+X_i)] = \frac{1}{n^2}n\vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n}.$$

ALTERNATIVE:

$$\mathrm{Var}[\hat{\vartheta}] = \left(\frac{1+n}{n^2}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[\log(1+X_i)] = \left(\frac{1+n}{n^2}\right)^2 n\vartheta^2 = \frac{(1+n)^2}{n^3}\vartheta^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

e) Wir nehmen an dass $\hat{\vartheta}$ normalverteilt ist, die Varianz ergibt sich aus d) zu $\frac{0.45^2}{n}$. Da $\hat{\vartheta}$ erwartungstreu ist hat $\vartheta - \hat{\vartheta} = \mathbb{E}\left(\hat{\vartheta}\right) - \hat{\vartheta}$ den Mittelwert 0. Insgesamt ist also $\vartheta - \hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{0.45^2}{n}\right)$.

Aufzulösen ist $\mathbb{P}\left(|\vartheta - \hat{\vartheta}| > 0.05\right) \leq 0.2$ was $q_{0.9} \leq 0.05$ entspricht, wobei $q_{0.9}$ das 0.9-Quantil von $\vartheta - \hat{\vartheta}$ ist. Wegen $q_{0.9} = z_{0.9}\sigma = z_{0.9}\frac{0.45}{\sqrt{n}} \leq 0.05$ folgt $n \geq \left(1.28\frac{0.45}{0.05}\right)^2 = 132.71$. Also sollte n mindesten 133 sein.

ALTERNATIVE: Da wir n gross annehmen ist $\frac{1+n}{n^2} \approx \frac{1}{n}$ und die Rechung ist die selbe.