Prof. Dr. P. Embrechts    ETH Zürich    Winter 2008

# Stochastik - Musterlösung
# (BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

**1. (12 Punkte)**

- **a)** iii)
- **b)** ii)
- **c)** ii)
- **d)** i)
- **e)** iii)
- **f)** iii)
- **g)** i)
- **h)** ii)
- **i)** ii)
- **j)** iii)

**2. (12 Punkte)**
$T$: ein zufällig ausgewählter Passagier ist ein Terrorist.
$R$: die Warnlampe leuchtet rot.

$$\begin{aligned} P(T) &= 10^{-6}, \\ P(R|T) &= 0.999, \\ P(R|T^c) &= \frac{0.999 \cdot 10^{-4}}{1 - P(T)}. \end{aligned}$$

- **a)** $P(T|R) = \frac{P(R|T)P(T)}{P(R)} = \frac{P(R|T)P(T)}{P(R|T)P(T)+P(R|T^c)P(T^c)} = \frac{0.999 \cdot 10^{-6}}{0.999 \cdot 10^{-6}+0.999 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1+100} = \frac{1}{101}$.
- **b)** Antwort **iii)**.
- **c)** $P(T|R) = \frac{0.999 \cdot 10^{-4}}{0.999 \cdot 10^{-4}+0.999 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2}$.
- **d)** $P(Z > x) = e^{-\lambda x} = 1/2$. Somit gilt $x = \ln(2)/\lambda \approx 0.693/4 \approx 0.173$.

**Bitte wenden!**

**3. (12 Punkte)**

**a)** Wegen
$$\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \int_0^1 1-2x+x^2\,dx = 1-1+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
ist $c=3$. Weiter ist
$$E[D] = \int xf(x)\,dx = 3\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = 3\int_0^1 x-2x^2+x^3\,dx = \frac{3}{2}-2+\frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

**b)** $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx = 3\int_0^y (1-x)^2\,dx = 3\int_0^y 1-2x+x^2\,dx = 3y-3y^2+y^3$ fr $0 \le y \le 1$ und 0 bzw. 1 sonst.

**c)** Fr $V = \frac{\pi}{4}HD^2$ gilt
$$E[V] = \frac{\pi}{4}E[H]E[D^2] = \frac{\pi}{40}E[D^2] = \frac{3\pi}{40}\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \frac{3\pi}{40}\int_0^1 x^2-2x^3+x^4\,dx$$
$$= \frac{3\pi}{40}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{40}\frac{1}{30} = \frac{\pi}{400}.$$

**d)** Sei $x = \frac{\pi}{160}$, dann ist
$$P[V>x] = P\left[\frac{\pi}{4\cdot 10}D^2 > x\right] = P\left[D > \sqrt{\frac{40x}{\pi}}\right]$$
$$= P\left[D > \sqrt{1/4}\right] = 1-F(1/2) = 1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

**e)** Verteilung von 1000 Löchern ist approx. $V' \sim \mathcal{N}(\mu' = 1000\mu, \sigma' = \sqrt{1000}\sigma) = \mathcal{N}(10, \sqrt{0.025})$. Gesucht ist $c$ so, dass $P[V' \le c] = 0.95$. $0.95 = \Phi_{\mu',\sigma'}(c) = \Phi(\frac{c-\mu'}{\sigma'})$, Tabelle für $\Phi$ liefert $\frac{c-\mu'}{\sigma'} = 1.645$, und somit $c = 10.26$.

**4. (12 Punkte)**

**a)** $[\bar{Y}_9 - t_{8,0.975}\frac{s_Y}{3}, \bar{Y}_9 + t_{8,0.975}\frac{s_Y}{3}] = [60.33 - 2.306\frac{\sqrt{226}}{3}, 60.33 + 2.306\frac{\sqrt{226}}{3}] = [48.78, 71.89]$

**b)** $H_0:\ \mu_X = \mu_Y, \qquad H_A: \mu_X < \mu_Y$

**c)** ungepaart

**d)** einseitig

**e)** Die zu betrachtende Statistik lautet: $T = \frac{\bar{X}_9 - \bar{Y}_9}{s_{pool}\sqrt{2/9}}$
Der Verwerfungsbereich ist dann: $VB = \{T \in (-\infty, -t_{16,0.95}]\} = \{T \in (-\infty, -1.746]\}$

**f)** Die Nullhypothese wird nicht verworfen, da die Teststatistik $T$ den Wert -1.44 annimmt und somit nicht im Verwerfungsbereich liegt.