

Stochastik

(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (15 Punkte)

Die Abteilung Forschung und Entwicklung eines Reifenherstellers hat eine neue Gummimischung für einen neuen Sommerreifen entwickelt. Um festzustellen, ob der neue Sommerreifen sich positiv auf den Bremsweg auswirkt (d.h. der Bremsweg wird kürzer), wird eine Testreihe angeordnet. Der Test besteht darin, dass man den Bremsweg eines mit 50 km/h fahrenden Personenfahrzeugs misst. Die Versuchsreihe besteht aus je 10 voneinander unabhängigen Versuchen mit den neuen und den alten Sommerreifen. Bei allen 20 Testfahrten wird dasselbe Fahrzeug verwendet. Die Messwerte lauten:

Versuch Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
alter Sommerreifen: X_i	15.5	16.4	15	15.3	14	14.2	13	15.4	16.4	15.9
neuer Sommerreifen: Y_i	13.4	11.8	12.3	14.6	13.5	14.4	14.7	16.2	12.7	12.5

Aus der obigen Tabelle kann man folgende Werte errechnen:

$$\bar{X}_{10} = 15.11, \bar{Y}_{10} = 13.61, s_X^2 = 1.19, s_Y^2 = 1.85, s_{X-Y}^2 = 4.44, s_{pool}^2 = 1.52.$$

Man kann davon ausgehen, dass der Bremsweg gut durch eine Normalverteilung beschrieben wird, und dass sich die Varianzen der einzelnen Versuchsreihen nicht unterscheiden, d.h. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Führen Sie einen geeigneten t-Test zum Niveau 1% durch, um festzustellen, ob der Bremsweg mit den neuen Sommerreifen kürzer ist. Beantworten Sie hierzu folgende Fragen.

- a) Wie lauten die Null- und Alternativhypothese in Worten?
- b) Schreiben Sie die Null- und Alternativhypothese mit Hilfe von μ_X und μ_Y formal hin.
- c) Handelt es sich hier um einen gepaarten oder ungepaarten Vergleich?
- d) Ist der Test ein- oder zweiseitig?
- e) Geben Sie den Verwerfungsbereich für den obigen t-Test an (Niveau 1%).
- f) Wird die Nullhypothese verworfen? Begründen Sie!
- g) Ist der P -Wert für den obigen Test grösser oder kleiner als das Niveau 1%? Begründen Sie!
- h) Welcher Test wäre hier angebracht, wenn man davon ausgehen muss, dass die Länge des Bremsweges nicht annähernd normalverteilt ist?

Bitte wenden!

2. (15 Punkte)

Eine Maschine besteht aus n Komponenten. Die Lebensdauer der Komponenten sei unabhängig und identisch exponentialverteilt: $T_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$, mit $\lambda > 0$. Sobald eine Komponente ausfällt, läuft die Maschine nicht mehr. Sei M die Laufzeit der Maschine.

- a) Bestimmen Sie die Dichte von M .
- b) Bestimmen Sie $E[M]$.
- c) Sei $\alpha < n\lambda$. Bestimmen Sie $E[e^{\alpha M}]$.
- d) Sei nun $n = 100$ und $S = \sum_{i=1}^n T_i$. Man hat herausgefunden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $S > 60$ ist, bei 2.275% liegt. Bestimmen Sie λ mit Hilfe einer Normalapproximation.
- e) Sei wiederum $n = 100$. Wegen einer technischen Innovation haben die ersten beiden Komponenten neu eine Lebensdauer, die unabhängig voneinander und von den anderen Komponenten $\text{Exp}(\lambda/k)$ -verteilt ist. Die Lebensdauer der anderen Komponenten bleibt unverändert. Berechnen Sie, um wieviele % sich dadurch $E[M]$ erhöht, falls $k = 3.83$.

3. (15 Punkte)

Ein zweistufiges Experiment wird wie folgt durchgeführt: Zuerst wird ein fairer sechser Würfel einmal geworfen. Die resultierende Augenzahl bezeichnen wir mit Y . Dann wird Y -mal eine faire Münze geworfen ("Kopf" und "Zahl" haben je 50% Wahrscheinlichkeit). X bezeichne die Anzahl "Kopf" aus den Y Münzwürfen.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit von $X = k$ ($k \in \{0, 1, 2, \dots\}$), wenn zuvor die Augenzahl auf dem Würfel ein j ergab ($j \in \{1, \dots, 6\}$)?
Hinweis: Binomialverteilung benützen!
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $X = 4$.
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von $Y = 4$, wenn wir wissen, dass X ebenfalls 4 ist.
- d) Welcher Wert für Y ist am wahrscheinlichsten, wenn $X = 4$ ist? (Berechnung durchführen!)
- e) Berechnen Sie den Erwartungswert von X .
Hinweis: Sie können $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{n}{2}$ benützen.
- f) Gibt es eine Zahl $j \in \{1, \dots, 6\}$, so dass $P[X = j] = P[Y = j]$? Wenn ja, geben Sie ein solches j an.