Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Ein Elektriker bekommt zwei Schachteln. In der ersten Schachtel befinden sich 3 defekte und 12 intakte Glühbirnen. In der zweiten Schachtel sind 10 defekte und 20 intakte Widerstände. Der Elektriker wählt zufällig (und unabhängig voneinander) eine Glühbirne und einen Widerstand und setzt sie in einen elektrischen Stromkreis ein. Damit die Glühbirne beim Schliessen des Stromkreises leuchtet, müssen sowohl die Glühbirne als auch der Widerstand intakt sein.
Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} G &= \text{Die gezogene Glühbirne ist defekt.} \\ W_1 &= \text{Der erste eingesetzte Widerstand ist defekt.} \end{aligned}$$

1.A1 [2 Punkte] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Glühbirne beim ersten Schliessen des Stromkreises nicht leuchtet.

Lösung:

Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} G &= \text{Die Glühbirne ist defekt.} \\ W_1 &= \text{Der erste eingesetzte Widerstand ist defekt.} \\ W_2 &= \text{Der zweite eingesetzte Widerstand ist defekt.} \\ L_1 &= \text{Die Lampe leuchtet mit dem ersten Widerstand nicht.} \\ L_2 &= \text{Die Lampe leuchtet mit dem zweiten Widerstand nicht.} \end{aligned}$$

Wegen $L_1 = G \cup W_1$ ist

$$\begin{aligned} P[L_1] &= P[G] + P[W_1] - P[G \cap W_1] = P[G] + P[W_1] - P[G]P[W_1] \\ &= \frac{3}{15} + \frac{10}{30} - \frac{3}{15} \cdot \frac{10}{30} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

1.A2 [2 Punkte] Mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit ist die eingesetzte Glühbirne defekt, gegeben dass die Glühbirne beim ersten Schliessen nicht leuchtet?

Lösung:

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$P[G \mid L_1] = \frac{P[G \cap L_1]}{P[L_1]} = \frac{P[G]}{P[L_1]} = \frac{1/5}{7/15} = \frac{3}{7}.$$

1.A3 [4 Punkte] Wir nehmen nun an, dass die Glühbirne nach dem ersten Schliessen des Stromkreises nicht geleuchtet hat. Deswegen ersetzen wir den ersten Widerstand durch einen zweiten, der zufällig aus den verbliebenen Widerständen ausgewählt wurde, und definieren das folgende Ereignis:

$$W_2 = \text{Der zweite eingesetzte Widerstand ist defekt.}$$

Beim zweiten Schliessen des Stromkreises stellen wir fest, dass die Glühbirne immer noch nicht leuchtet. Beschreiben Sie dieses Ereignis mit Hilfe der Ereignisse G, W_1 und W_2 und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

Lösung:

Das gesuchte Ereignis ist $L_1 \cap L_2 = G \cup (W_1 \cap W_2)$ und somit

$$\begin{aligned}
P[L_1 \cap L_2] &= P[G] + P[W_1 \cap W_2] - P[G \cap W_1 \cap W_2] \\
&= P[G] + P[W_1 \cap W_2] - P[G]P[W_1 \cap W_2] \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{9}{29} - \frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{9}{29} \\
&= \frac{29 + 15 - 3}{145} = \frac{41}{145}.
\end{aligned}$$

1.A4 [2 Punkte] Wie gross ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die eingesetzte Glühbirne defekt ist, gegeben dass die Glühbirne beim ersten und zweiten Schliessen des Stromkreises nicht geleuchtet hat?

Lösung:

$$\begin{aligned}
P[G \mid L_1 \cap L_2] &= \frac{P[G \cap L_1 \cap L_2]}{P[L_1 \cap L_2]} = \frac{P[G]}{P[L_1 \cap L_2]} \\
&= \frac{1/5}{41/145} = \frac{29}{41}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Seien A und B Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \mid B] = 0.1$, $\mathbb{P}[A \mid B^c] = 0.05$ und $\mathbb{P}[B] = 0.3$. Wie gross ist $\mathbb{P}[A]$?

(A) $\mathbb{P}[A] = 0.045$

(B) $\mathbb{P}[A] = 0.055$

(C) $\mathbb{P}[A] = 0.065$

Lösung:

$\boxed{\mathbb{P}[A] = 0.065}$

2.MC2 [1 Punkt] Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = \begin{cases} 0.1, & \text{für } k = 0 \\ 0.4, & \text{für } k = 1 \\ 0.3, & \text{für } k = 2 \\ 0.2, & \text{für } k = 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Erwartungswert von X ist:

(A) $\mathbb{E}[X] = 1.3$

(B) $\mathbb{E}[X] = 1.6$

(C) $\mathbb{E}[X] = 2.5$

Lösung:

$\boxed{\mathbb{E}[X] = 1.6}$

2.MC3 [1 Punkt] Sei U eine auf dem Intervall $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable und $X = -\log(1 - U)$. Dann gilt:

(A) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 2$.

(B) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$.

(C) X ist standard normalverteilt.

Lösung:

X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$.

2.MC4 [1 Punkt] Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 2 und Varianz 4. Desweiteren sei $Y = 3 - 2X$. Wie gross ist ungefähr $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1]$?

(i) $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.72$

(ii) $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.95$

(iii) $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.42$

Lösung:

$\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.72$

2.MC5 [1 Punkt] Seien X und Y zwei unabhängige standard normalverteilte Zufallsvariablen. Wie gross ist die Kovarianz der Zufalssvariablen

$$Z = 1 + X + XY^2 \text{ und } W = 1 + X?$$

(A) $\mathrm{Cov}(Z, W) = 2$

(B) $\mathrm{Cov}(Z, W) = 3$

(C) $\mathrm{Cov}(Z, W) = 1$

Lösung:

$\mathrm{Cov}(Z, W) = 2$

2.MC6 [1 Punkt] Wir beobachten die folgenden geordneten Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{(i)}$	65.32	65.45	65.48	65.53	65.59	65.64	65.72	65.77	65.81	65.93

Wie gross ist das empirische 90%-Quantil $q_{0.9}$?

(A) $q_{0.9} = 65.81$

(B) $q_{0.9} = 65.87$

(C) $q_{0.9} = 65.79$

Lösung:

$q_{0.9} = 65.87$

2.MC7 [1 Punkt] Betrachten Sie die Zufallsvariable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ Bernoulli verteilte Zufallsvariablen sind mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ für $i = 1, \ldots, n$. Welche Aussage ist richtig?

(A) $\mathbb{P}[X = 1] = np(1-p)^{n-1}$

(B) $\mathbb{E}[X] = np$

(C) $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Lösung:

$\mathbb{E}[X] = np$

2.MC8 [1 Punkt] Wir betrachten die empirische Korrelation von (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, 10$. Dann gilt:

(A) Wenn die empirische Korrelation gleich minus eins ist, dann liegen die Daten auf einer Geraden mit positiver Steigung.

(B) Wenn die empirische Korrelation gleich null ist, dann gibt es keine Abhängigkeit zwischen den Datenpunkten x_i und y_i.

(C) Das Vorzeichen der empirischen Korrelation bestimmt die Richtung des linearen Zusammenhangs.

Lösung:

Das Vorzeichen der empirischen Korrelation bestimmt die Richtung des linearen Zusammenhangs.

2.MC9 [1 Punkt] Bei einem statistischen Test hängt der p-Wert

(A) von der Stichprobe ab.

(B) vom Fehler 1. Art ab.

(C) von der Stichprobe und vom Fehler 1. Art ab.

Lösung:

von der Stichprobe ab.

2.MC10 [1 Punkt] Welche Aussage ist korrekt?

(A) Je grösser das Signifikanzniveau α ist, desto kleiner ist der Verwerfungsbereich.

(B) Der Wilcoxon-Test benötigt weniger Annahmen als der t-Test.

(C) Bei ungepaarten Stichproben stimmt die Stichprobengrösse nie überein.

Lösung:

Der Wilcoxon-Test benötigt weniger Annahmen als der t-Test.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\frac{y}{x^3} & 0 < x \leq 1,\, 0 < y \leq x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

3.A1 [1 Punkt] Bestimmen Sie den Parameter c.

Lösung:

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ bezeichnet $\mathbf{1}_A$ die zugehörige charakteristische Funktion, d.h.

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases}$$

Die Normalisierungsbedingung einer Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt die Bedingung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dydx = c\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{x^3}\, dydx = \frac{c}{2}\int_0^1 x\, dx = \frac{c}{4}.$$

Somit muss $c = 4$ sein.

3.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie die Randdichte von X.

Lösung:

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Dichte f_X von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Also gilt

$$f_X(x) = \frac{4}{x^3}\int_0^{x^2} y\, dy\, \mathbf{1}_{\{0<x\leq 1\}} = \frac{2}{x^3}x^4 \mathbf{1}_{\{0<x\leq 1\}} = 2x\mathbf{1}_{\{0<x\leq 1\}}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

3.A3 [1 Punkt] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \leq 1/2]$.

Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{P}[X \leq 1/2] = \int_{-\infty}^{1/2} f_X(x)\, dx = 2\int_0^{1/2} x\, dx = 1/4.$$

3.A4 [2 Punkte] Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable $Z = X/Y$.

Lösung:

Wir haben
$$\mathbb{E}[X/Y] = \int_{\mathbb{R}^2} x/y f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 4\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{x^2} dydx = 4.$$

3.A5 [2 Punkte] Bestimmen Sie den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[Y \mid X = 1/2]$.

Lösung:

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die bedingte Dichte $f_{Y|X}(y \mid x)$ gegeben ist durch
$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)},$$
falls $f_X(x) > 0$ und der bedingte Erwartungswert sich in diesem Fall gemäss
$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x)\,dy$$
berechnet. Wegen $f_X(1/2) = 1$ finden wir
$$\mathbb{E}[Y \mid X = 1/2] = 32\int_0^{1/4} y^2\,dy = \frac{1}{6}.$$

3.A6 [2 Punkte] Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Randdichte f_Y. Wir erhalten
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = 4\int_{\sqrt{y}\le x\le 1} \frac{y}{x^3}\,dx\,\mathbf{1}_{\{0<y\le 1\}} = 4y\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{dx}{x^3}\mathbf{1}_{\{0<y\le 1\}} \\ &= -\left.\frac{2y}{x^2}\right|_{\sqrt{y}}^1 \mathbf{1}_{\{0<y\le 1\}} = 2(1-y)\mathbf{1}_{\{0<y\le 1\}} \end{aligned}$$
für $y \in \mathbb{R}$. Wegen
$$f_X(x)f_Y(y) = 2x(1-y)\mathbf{1}_{\{0<x\le 1\}}\mathbf{1}_{\{0<y\le 1\}} \neq f_{X,Y}(x,y)$$
für $x, y \in \mathbb{R}$ können die Zufallsvariablen X und Y nicht unabhängig sein.

Aufgabe 4

An einer Fussball-Schülermeisterschaft wurden in 350 Spielen insgesamt 839 Tore geschossen. Die während eines Spieles erzielten Tore pro Mannschaft waren wie folgt verteilt.

Tore pro Mannschaft und Spiel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Tot.
Anzahl Vorkommnisse	224	233	154	70	10	8	0	0	1	839

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass es beispielsweise 154 mal vorgekommen ist, dass eine Mannschaft 2 Tore in einem Spiel erzielt hat.
Nehmen Sie an, dass die Anzahl erzielter Tore einer Mannschaft pro Spiel unabhängig ist von der Anzahl erzielter Tore ihrer Gegner und Poisson-verteilt ist mit Parameter λ.

4.A1 [3 Punkte] Geben Sie unter der obigen Annahme eine Schätzung $\widehat{\lambda}$ für den Parameter λ an.

Lösung:

Wir betrachten i.i.d. Zufallsvariablen $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, 700$, welche die Anzahl erzielter Tore einer Mannschaft pro Spiel beschreiben. Wir benutzen nun die Momentenmethode. Aus der Vorlesung wissen wir dass gilt $\lambda = E(X_i)$. Deshalb wählen wir einfachheitshalber als Schätzer

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{700} \sum_{i=1}^{700} x_i = \frac{839}{700} \sim 1.199.$$

4.A2 [3 Punkte] Nehmen Sie an, dass $\lambda = \widehat{\lambda}$. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass während eines Spiels insgesamt mindestens 3 Tore geschossen werden?

Lösung:

Wir bezeichnen die erzielten Tore der einen Mannschaft mit X_1 und der zweiten Mannschaft mit X_2. Sei $Y = X_1 + X_2$ die Anzahl erzielter Tore während eines Spiels, wobei nach Annahme X_1 und X_2 unabhängig und $\text{Pois}(\widehat{\lambda})$-verteilt sind. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass gilt $Y \sim \text{Pois}(2\widehat{\lambda})$. Folglich

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - e^{-2\hat{\lambda}}(1 + 2\hat{\lambda} + 2\hat{\lambda}^2) \sim 0.430,$$

wobei $P(Y = k) = \frac{e^{-2\widehat{\lambda}}(2\widehat{\lambda})^k}{k!}$.

4.A3 [4 Punkte] Geben Sie ein approximatives zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für den Parameter λ an. Das Vertrauensintervall soll dabei bis auf 3 Stellen nach dem Komma angegeben werden.

Lösung:

Wir verwenden eine Normalapproximation um ein approximatives Vertrauensintervall zu finden. Wegen $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$ wissen wir dass $\mathbb{E}[\widehat{\lambda}] = \lambda$ und

$$\text{Var}(\widehat{\lambda}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \frac{\lambda}{n}.$$

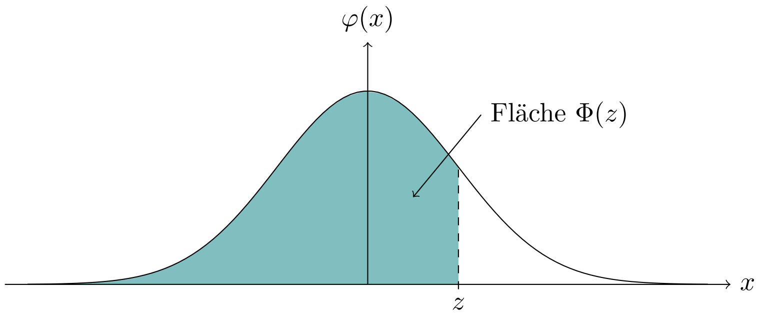
Deshalb approxmieren wir gemäss dem zentralen Grenzwertsatz $\hat{\lambda}$ mit einer $N(\lambda, \lambda/n)$-verteilten Zufallsvariable . Dann ist $\sqrt{n/\hat{\lambda}} \cdot (\lambda - \hat{\lambda})$ approximativ standard normal , woraus wir das approximative Vertrauensintervall

$$\begin{aligned} I &= \left[\widehat{\lambda} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\lambda}/n}, \widehat{\lambda} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\lambda}/n}\right] \\ &= \left[1.199 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.199}{700}}, 1.199 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.199}{700}}\right] \\ &= [1.118, 1.280] \end{aligned}$$

erhalten. Hier haben wir $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$ verwendet.

Tabelle der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \mathbb{P}\left(Z \leq z\right), \; Z \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$



Lesebeispiel Tabelle: $\mathbb{P}\left(Z \leq 1.96\right) = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998