Musterlösung W&S

1. a) 1) b) 2) c) 3) d) 1) e) 1) f) 1) g) 1) h) 3) i) 2) j) 3)

2. **a)** Sei $A_1 = \{\text{normale Münze gewählt}\}$, $A_2 = \{\text{Münze mit zwei Köpfe gewählt}\}$ und $B = \{\text{das Resultat war 'Kopf'}\}$. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] = P[B|A_1]P[A_1] + P[B|A_2]P[A_2] = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällig gewählte Person krank ist, gegeben sie wurde positiv getestet ist:

$$\begin{aligned} P[\text{krank}|\text{positiv}] &= \frac{P[\{\text{krank}\} \cap \{\text{positiv}\}]}{P[\text{positiv}]} = \frac{P[\text{positiv}|\text{krank}]P[\text{krank}]}{P[\text{positiv}]} \\ &= \frac{P[\text{positiv}|\text{krank}]P[\text{krank}]}{P[\text{positiv}|\text{gesund}]P[\text{gesund}] + P[\text{positiv}|\text{krank}]P[\text{krank}]} \\ &= \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{10}}{\frac{99}{100}\frac{1}{10} + \frac{1}{100}\frac{9}{10}} = \frac{99}{108} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

c) Sei W der Wert auf dem Würfel der Spielerin und G das Ereignis dass die Spielerin gewonnen hat. Dann gilt

$$P[W=1|G] = \frac{P[G|W=1]P[W=1]}{P[G]} = \frac{P[G|W=1] \cdot \frac{1}{6}}{P[G]} = \frac{\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{7}{27}} = \frac{1}{56},$$

Bemerkung: Würfelt die Spielerin eine Eins, so gewinnt Sie nur, falls das Casino mit den beiden Würfeln je eine Eins würfelt. Somit ist klar, $P[G|W=1] = \frac{1}{36}$ (Laplace-Modell, d.h. $\frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$)

Bitte wenden!

3. **a)** X = Anzahl von den Stornierungen, $X \approx \text{Bin}(n, p)$, wobei $p = 0.2$ und $n = 100$.

b) Die exakte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(X \leq 25) = \sum_{k=0}^{25} \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k}.$$

Wegen dem Zentralen Grenzwertsatz gilt folgende Normalapproximation (mit $p = 0.2$ und $n = 100$):

$$X \approx \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right),$$

so dass

$$\begin{aligned} P(X \leq 25) &= P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{25 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{25 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi(1.25) = 0.8944. \end{aligned}$$

c) Analog zu b) wird X standardisiert, so dass aufgrund der Normalapproximation gilt:

$$1 - \alpha = P\left(\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq \frac{c(n) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \approx \Phi\left(\tfrac{c(n) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right).$$

Auflösen nach $c(n)$ liefert

$$c(n) = \Phi^{-1}(0.9)\sqrt{n}\sqrt{p_0(1-p_0)} + np_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

d) Wir wollen, dass

$$P(\text{Fehler 2. Art}) = P(H_0 \text{ behalten} | H_A \text{ wahr}) = P_{H_A}(X \leq c(n)) \leq 0.1.$$

Mit Normalisierung,

$$P_{H_A}(X \leq c(n)) = P_{H_A}\left(\frac{X - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}} \leq \frac{c(n) - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}}\right) \leq 0.1.$$

Mittels Normalapproximation erhält man also

$$P_{H_A}(X \leq c(n)) \approx \Phi\left(\frac{c(n) - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}}\right) \leq 0.1$$

Daraus folgt,

$$\frac{c(n) - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}} \leq \Phi^{-1}(0.1).$$

Von Teilaufgabe c) übernehmen wir $c(n)$ und somit

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi^{-1}(0.9)\sqrt{n}\sqrt{p_0(1-p_0)} + np_0 - np_A}{\sqrt{n}\sqrt{p_A(1-p_A)}} &\leq \Phi^{-1}(0.1) \\
\Phi^{-1}(0.9)\sqrt{\frac{1}{10}\frac{9}{10}} + \sqrt{n}\left(\frac{1}{10} - \frac{2}{10}\right) &\leq \Phi^{-1}(0.1)\sqrt{\frac{2}{10}\frac{8}{10}} \\
-\frac{1}{10}\sqrt{n} &\leq \Phi^{-1}(0.1)\cdot\frac{4}{10} - \Phi^{-1}(0.9)\cdot\frac{3}{10} \\
\sqrt{n} &\geq 3\Phi^{-1}(0.9) - 4\Phi^{-1}(0.1) \\
\sqrt{n} &\geq 7\Phi^{-1}(0.9), \\
n &\geq 9^2 = 81
\end{aligned}
$$

denn $\Phi^{-1}(0.1) = -\Phi^{-1}(0.9) = 9/7$ (gemäss Hinweis). Somit müssen mindestens $n = 81$ Buchungen eingehen, damit der Fehler 2. Art höchstens 10% beträgt.

4. **a)** (**1 Punkt**) Gepaart, denn beide Akkus wurden jeweils an den selben Versuchseinheiten (die 9 Computer) eingesetzt.

b) (**6 Punkte**) Betrachte die Differnzen d_i können wir als iid Realisierungen von Zufallsvariablen $D_i := X_i - Y_i$ $(i = 1, \ldots, 9)$ auffassen. Nach Voraussetzung gilt $D_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ unbekannt ist.

i) Wir möchten lediglich wissen ob ein signifikanter Unterschied bei den Laufzeiten der beiden Akkutypen besteht. Es interessiert uns also nicht, ob der eine Akkutyp länger läuft als der andere. Darum lauten Null- und Alternativhypothese also:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0, \quad H_A : \mu \neq \mu_0.$$

(**1 Punkt** H_0 und **1 Punkt** H_A)

ii) Aufgrund der Alternativ-Hypothese ist ein zweiseitiger t-Test durchzuführen. (**1 Punkt**)

iii) Da die Stichprobe gepaart ist, lautet die Teststatistik

$$T := \frac{\bar{D}_n - \mu_0}{S_d/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cdot\frac{\bar{D}_n}{S_d}.$$

T ist unter H_0 t-verteilt mit $n - 1 = 8$ Freiheitgraden. Für $\alpha = 0.05$ erhält man für einen zweiseitigen Test den Verwerfungsbereich

$$K = (-\infty, t_{8,2.5\%}) \cup (t_{8,97.5\%}, \infty) = (-\infty, -2.306) \cup (2.306, \infty).$$

Dabei wird verwendet, dass die t-Verteilung symmetrisch um ihren Mittelwert 0 ist und somit $t_{8,2.5\%} = -t_{8,97.5\%} = -2.306$ (aus der Quantil-Tabelle der t-Verteilung)
(**2 Punkte** für korrekten VB: **1 Punkt** für Form von K und **1 Punkt** für korrektes Quantil (d.h. df$= n - 1 = 8$ & "$\alpha/2$"-Level 97.5%))

Bemerkung: Wenn jemand einseitig testest: **max. 1 Punkt** *für korrekten VB* $(-\infty, t_{8,5\%}]$ *resp.* $[t_{8,95\%}, \infty)$ *falls konsistent mit* H_A*. Es gibt* **keinen** *zweiten Punkt, da zu stark vereinfacht - kann ja nicht prürfen, ob das mit dem "halben" Level* 97.5% *verstanden wurde.*

iv) Testentscheidung: Nach Voraussetzung haben wir $\bar{D}_n = \bar{a}_n - \bar{b}_n = 8.2$ und somit

$$T = \sqrt{9} \cdot \frac{8.2}{9.6} = \frac{246}{96} = \frac{41}{16}.$$

Mit Hinweis $246/96 \approx 2.56$ gilt sicherlich $T \in K$. Die Nullhypothese wird also verwofen auf dem 5%-Niveau. (**1 Punkt**)

c) (**3 Punkte**) Der P-Wert ist der kleinste Wert, bei welchem H_0 grad noch verworfen wird, d.h. P-Wert $= P_{H_0}(T \in (-\infty, T_{obs}]) = P(T \leq -2.54)$. Der Wert -2.54 liegt zwischen den beiden Quantilwerten $t_{0.02} = -t_{0.98} = -2.449$ und $t_{0.01} = -2.896$ siehe (Tabelle der t-Verteilung mit 8 Freiheitsgraden). Da der Test einseitig ist, liegt der P-Wert demzufolge zwischen 1% und 2%.
Bermerkung: Der exakte Wert ist gegeben durch das dasjenige Level α_P, welches dem Quantilwert -2.54 der t-Verteilung mit $df = 8$ entspricht. Die Statistiksoftware R zum Beispiel liefert $\alpha_P \approx 0.01735539$, also etwa 1.74%
(**1 Punkt** falls ersichtlich, dass Bedeutung des P-Wertes verstanden wurde. + **1 Punkt** falls Symmetrie $t_{8,\alpha} = -t_{8,1-\alpha}$ verstanden + **1 Punkt** falls zudem Level richtig abgeschätzt).