

Wahrscheinlichkeit und Statistik

BSc D-INFK

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. **Kein Taschenrechner!**

Name:	
Vorname:	
Stud. Nr.:	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	mögliche Punkte	erreichte Punkte	Kontrolle
1	11		
2	9		
3	12		
4	8		

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

1. (11 Punkte) Die Zufallsvariable X sei extremwertverteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F_\alpha(x) = e^{-e^{-(x-\alpha)}}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass F_α eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie die Dichte f_α .
- b) (4 Punkte) Berechnen Sie mithilfe der Konstanten $\gamma = -\int_0^\infty \log x e^{-x} dx \approx 0.5772$ den Erwartungswert der zugehörigen Verteilung.
- c) (4 Punkte) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_α resp. F_β . Zeigen Sie, dass $Z = \max(X; Y)$ wieder extremwertverteilt ist mit Parameter δ und geben Sie δ in Abhängigkeit von α und β an.

2. (9 Punkte) Die erwartete Lebensdauer μ eines peruanischen Lamas ist unbekannt und soll durch den Durchschnitt der Lebensdauern von n Exemplaren geschätzt werden. Es wird angenommen, dass die entsprechenden Lebensdauern L_1, \dots, L_n unabhängig und identisch verteilt sind sowie endliche zweite Momente haben. Wir nehmen an, dass $\sigma_{L_i} = 6$. Ihr Durchschnitt ist die Zufallsvariable

$$\bar{L}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i.$$

- a) (3 Punkte) Wie gross ist der Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen \bar{L}_n ? Zeigen Sie, dass

$$P[|\bar{L}_n - \mu| \leq 1] = F_{\bar{L}_n}[\mu + 1] - F_{\bar{L}_n}[\mu - 1],$$

wobei $F_{\bar{L}_n}$ die Verteilungsfunktion von \bar{L}_n ist.

- b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für n gross genug,

$$P[|\bar{L}_n - \mu| \leq 1] \approx 2\Phi\left[\frac{\sqrt{n}}{6}\right] - 1.$$

- c) (3 Punkte) Wie gross muss n ungefähr sein, damit der Absolutbetrag der Differenz zwischen dem Durchschnitt der Lebensdauern und μ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% höchstens 1 Jahr beträgt?

3. (12 Punkte) Die peruanische Regierung will die Zahl der Flüchtlinge aus dem krisengeschüttelten Venezuela vorhersagen. Sie modelliert diese Zahl mit den Zufallsvariablen $(X_i)_{i=1}^n$ (in Millionen). Seit August 2018 beobachtete sie täglich die Zahl der Flüchtlinge. Für $i = 1, \dots, n = 180$ sei X_i jene Zufallsvariable, welche die Zahl der Flüchtlinge des i -ten Tag repräsentiert. Wir nehmen an, dass für $\theta \in \mathbb{R}$

$$X_i = \theta X_{i-1} + \varepsilon_i \quad \text{mit } X_0 = 0.$$

Die ε_i sind i.i.d und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilt. Negative Flüchtlinge bedeutet Auswanderer.

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X_i für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ null ist.
- b) (2 Punkte) Für $q \neq 1$ ist $\sum_{i=1}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Zeigen Sie mithilfe dieser Summe einer geometrischen Folge, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\text{Var}[X_i] = \sigma^2 \frac{1 - \theta^{2i}}{1 - \theta^2}.$$

- c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die gemeinsame Dichte von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gegeben ist durch

$$f_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)}(e_1, e_2, \dots, e_n) = f(e_1)f(e_2) \dots f(e_n),$$

wobei f die Dichte einer $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable ist.

- d) (4 Punkte) Die gemeinsame Dichte von X_1, \dots, X_n ist gegeben durch:

$$f_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2 - \theta x_1)f(x_3 - \theta x_2) \dots f(x_n - \theta x_{n-1}),$$

wobei f die Dichte einer $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable ist. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ .

- e) (2 Punkte) Es gibt einen linearen Zusammenhang zwischen X_i und X_{i-1} . Deswegen können wir die Methode der kleinsten Quadrate (Ordinary Least Squares) benutzen, um den Parameter θ zu schätzen. Für gegebene X_1, \dots, X_n , bestimmen Sie den Ordinary Least Squares-Schätzer als den Wert $\theta \in \mathbb{R}$, der die Summe $\sum_{i=2}^n \varepsilon_i^2$ minimiert.

4. (8 Punkte) Im Januar 2018 sind bei einem schweren Busunglück in Peru 48 Menschen ums Leben gekommen. Der Verkehrsminister fragt sich, ob die Busse in Peru mit angemessener Geschwindigkeit fahren. Es ist gefährlich, zu schnell oder zu langsam zu fahren. Seine Berater sagen ihm, die Geschwindigkeit der Busse auf peruanischen Autobahnen liege im Durchschnitt bei 90 km/h. Um diese Hypothese nachzuprüfen, lässt er die Geschwindigkeit von 16 Bussen messen. Die Ergebnisse sind wie folgt:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x_{(k)}$	98	99	100	101	98	99	98	110	101	96	97	94	94	95	94	95

Es wird angenommen, dass diese Werte Realisationen von unabhängigen $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen sind. Das empirische Mittel ist $\bar{x}_{16} = 98$ und die empirische Standardabweichung $s_{16} = 4$.

- a) (2 Punkte) Konstruieren Sie das 99%-Vertrauensintervall für den Parameter μ .
- b) (4 Punkte) Lässt sich mit diesen Daten die Hypothese auf einem Niveau von 5% verwerfen, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit der Busse bei 90 km/h liegt? Formulieren Sie dazu eine geeignete Alternative, geben Sie an, ob der Test ein- oder zweiseitig ist und führen Sie den Test durch.
- c) (2 Punkte) Geben Sie das kleinste Niveau an, bei dem der Test aus b) die Hypothese gerade noch verwirft.

Tabelle der Standardnormalverteilung $P(Z \leq 1.96) = 0.975$

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Tabelle der t -Verteilung $P(T_9 \leq 2.262) = 0.975$

$df \backslash \alpha$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576